

D.S.2 samedi 18 Octobre 2025 (3h)

Exercice 1 :

Les deux parties sont indépendantes, et dans la partie A, les questions 1,2 et 3 sont indépendantes les unes des autres.

Pour traiter ce problème, on admettra le théorème suivant:

Théorème A: Si $P(z) = a_p z^p + a_{p-1} z^{p-1} + \dots + a_1 z + a_0$ est un polynôme de degré p (p est un entier naturel et les coefficients $a_p, a_{p-1}, \dots, a_1, a_0$ sont des nombres réels ou complexes) admettant p racines distinctes $z_1, z_2, \dots, z_p \in \mathbb{C}$, alors on peut factoriser P sous la forme:

$$P(z) = a_p(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_p).$$

Partie A :

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose:

$$P(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4.$$

1a Déterminer $P(e^{2i\pi/5})$.

1b En déduire que $1 + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0$.

1c Donner une deuxième relation entre $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

1d En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ vérifie l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$.

En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

2a Factoriser le polynôme $Q(z) = z^5 - 1$ en produits de facteurs de degré 1 (on pourra utiliser le théorème admis).

2b En déduire que $z^5 - 1 = (z - 1) \left(z^2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) z + 1 \right) \left(z^2 - 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) z + 1 \right)$.

2c En déduire que $P(z) = \left(z^2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) z + 1 \right) \left(z^2 - 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) z + 1 \right)$.

3 Pour $z \neq 0$, on pose $u = z + \frac{1}{z}$.

3a Exprimer $u^2 + u - 1$ en fonction de $P(z)$ (pour $z \neq 0$).

3b En déduire que $P(z) = z^2 \left(u - \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right) \left(u - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)$

3c En déduire une factorisation de P en produit de deux trinômes du second degré.

3d En admettant l'unicité d'une décomposition de P sous les formes des questions 2.c.) et 3.c.) (à l'ordre d'écriture des facteurs près), retrouver la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. (trouvée à la question 1.d.)).

Partie B :

On suppose $n \geq 2$ et $P(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}$.

4 Montrer que $e^{\frac{i\pi}{n}} \times e^{\frac{2i\pi}{n}} \times e^{\frac{3i\pi}{n}} \times \dots \times e^{\frac{(n-1)i\pi}{n}} = i^{n-1}$.

5 Montrer que

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = 2^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \times \dots \times \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$

6 On pose $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $k = 1, 2, \dots, n-1$.

6a Calculer $P(z_k)$.

6b En déduire la factorisation de P en produits de facteurs de degré 1 (on pourra utiliser le théorème admis).

7 Montrer que

$$n = 2^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \times \dots \times \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$

8 Soient $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ les points d'affixes respectives $1, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$.

8a Calculer le produit des distances $A_0A_1 \times A_0A_2 \times A_0A_3 \times \dots \times A_0A_{n-1}$.

8b Montrer que le produit des longueurs des arêtes et des diagonales du polygone $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}$ est égal à $\sqrt{n^n}$ (les arêtes et les diagonales sont les segments $[A_jA_k]$ pour $j \neq k$).

Exercice 2 : On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par: $\forall t \in \mathbb{R}_*^+, \varphi(t) = t + \ln(t)$

1a Montrer que φ est une bijection.

1b Dresser le tableau de variation de son application réciproque φ^{-1} en y faisant figurer les limites aux bornes de son domaine de définition et la valeur de $\varphi^{-1}(1)$.

2 On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que: $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \ln(\varphi^{-1}(x))$.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

2a Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ en fonction de $\varphi^{-1}(x)$.

2b Dresser le tableau de variation de f en y faisant figurer les limites aux bornes de son domaine de définition et la valeur de $f(1)$.

2c Calculer $f'(1)$ et déterminer l'équation de la tangente T_1 à C_f en son point d'abscisse 1.

2d Montrer: $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x = -\varphi^{-1}(x)$.

En déduire la position relative de C_f par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$ (c'est-à-dire préciser pour chaque abscisse x si C_f est au dessus ou en dessous de Δ). Déterminer la limite de $f(x) - x$ lorsque x tend vers $-\infty$.

2e Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$: $f(x) - \ln(x) = -\ln\left(1 + \frac{\ln(t)}{t}\right)$, où $t = \varphi^{-1}(x)$.

En déduire la position relative de C_f par rapport à la courbe $C_{\ln}$ de $\ln$ sur $]1, +\infty[$ et la limite de $f(x) - \ln(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2f Tracer dans un repère orthonormé du plan l'allure de la courbe C_f en y faisant figurer les droites T_1 et Δ , et la courbe $C_{\ln}$.

2g Montrer que f est une bijection et déterminer $f^{-1}(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 : Dans cet exercice, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k$$

1 Calculer explicitement a_4 sans symbole $\sum$ (et sans coefficient binomiaux non calculés).

2 Dans cette question seulement, on suppose que $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ et de premier terme b_0 . Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer a_n en fonction de n, q et b_0 .

3 Dans cette question seulement, on suppose que $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ et de premier terme b_0 .

3a Démontrer que $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$ (pas de récurrence !!).

3b En déduire pour $n \in \mathbb{N}$ une expression de a_n en fonction de n, b_0 et r .

4 Retour au cas général.

4a Montrer que si k, n, m sont trois entiers tels que $0 \leq k \leq n \leq m$, alors :

$$\binom{m+1}{n} \binom{n}{k} = \binom{m+1}{k} \binom{m+1-k}{n-k}$$

4b Montrer que si k et m sont deux entiers tels que $0 \leq k \leq m$, alors :

$$\sum_{j=0}^{m-k} (-1)^j \binom{m+1-k}{j} = (-1)^{m-k}$$

4c Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$ le nombre b_{n+1} en fonction de a_{n+1} et des nombres $b_0, b_1, \dots, b_n$.

4d Montrer la formule d'inversion de Pascal :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a_k$$

On considère à présent la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $e_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $e_n = ne_{n-1} + (-1)^n$ et la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e_k$$

5 Calculer e_k pour k variant de 1 à 5 puis f_k pour k variant de 0 à 5.

6 Déterminer une expression de f_n en fonction de n .

7 En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

Exercice 4 : Dans cet exercice, on pourra utiliser une version du théorème des valeurs intermédiaires donnée ci-dessous, un peu plus forte que celle donnée en cours :

Théorème des valeurs intermédiaires généralisé : Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f admet des limites $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ et que $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) < \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

Si f est continue sur $]a, b[$ et si $y \in \left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$, alors

il existe un réel $r \in]a, b[$ vérifiant $f(r) = y$.

Soit $\alpha \in [2\pi, 4\pi[$. Pour $x \in]0, \pi[$, on pose $g(x) = \frac{\alpha - x}{\sin(x)} e^{(\alpha - x) \frac{\cos(x)}{\sin(x)}}$.

1 Déterminer la limite de $g(x)$ quand x tend vers 0^+ (on a toujours $x \in]0, \pi[$).

2 On pose $h(x) = \frac{\alpha - x}{\sin(x)}$ pour $x \in]0, \pi[$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\ln(g(x))}{h(x)} = -1$.

3 En déduire la limite de $g(x)$ quand x tend vers π^- .

4 Montrer que $\text{Im}(g) = \mathbb{R}^{+*}$ (on rappelle que g n'est définie que pour $x \in]0, \pi[$, on ne s'occupe pas d'autres valeurs possibles de x).

On considère à présent la fonction $f : z \mapsto f(z) = ze^z$ définie pour $z \in \mathbb{C}$ et à valeurs complexes. Soit $Z = re^{i\alpha}$ avec $r > 0$ et $\alpha \in [2\pi, 4\pi[$. On pose $z = \rho e^{ix}$ avec $\rho > 0$ et $x \in]0, \pi[$.

5 Montrer que $f(z) = Z \iff \begin{cases} r = g(x) \\ \rho = h(x) \end{cases}$.

6 Montrer que f est surjective.

Corrigé de l'exercice 1 :

Partie A :

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose:

$$P(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4.$$

1a Déterminer $P(e^{2i\pi/5})$.

$$\text{On a : } P(e^{2i\pi/5}) = 1 + e^{2i\pi/5} + (e^{2i\pi/5})^2 + (e^{2i\pi/5})^3 + (e^{2i\pi/5})^4 = 1 \times \frac{1 - (e^{2i\pi/5})^5}{1 - e^{2i\pi/5}} \text{ car } e^{2i\pi/5} \neq 1.$$

$$\text{Mais comme } (e^{2i\pi/5})^5 = e^{2i\pi} = 1, \text{ il vient } P(e^{2i\pi/5}) = 0.$$

1b En déduire que $1 + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0$.

Or :

$$\begin{aligned} P(e^{2i\pi/5}) &= 1 + e^{2i\pi/5} + e^{4i\pi/5} + e^{6i\pi/5} + e^{8i\pi/5} = 1 + e^{2i\pi/5} + e^{4i\pi/5} + e^{-4i\pi/5} + e^{-2i\pi/5} \\ &= 1 + 2 \operatorname{Re}(e^{2i\pi/5}) + 2 \operatorname{Re}(e^{4i\pi/5}) = 1 + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) \end{aligned}$$

donc:

$$1 + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0.$$

1c Donner une deuxième relation entre $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

$$\text{On a : } \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1.$$

1d En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ vérifie l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$.

En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } 1 + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2 \left(2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1\right) &= 0 \text{ c'est-à-dire } 1 + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 4 \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - \\ 2 &= 0 \text{ donc } \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \text{ vérifie l'équation } 4x^2 + 2x - 1 = 0. \end{aligned}$$

On calcule le discriminant: $\Delta = 4 + 16 = 20 = (2\sqrt{5})^2$ donc les deux racines de l'équation sont

$$x_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \text{ et } x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Comme $\frac{2\pi}{5} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on sait que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \geq 0$, or $x_1 < 0$ (et $x_2 > 0$) donc:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}.$$

2a Factoriser le polynôme $Q(z) = z^5 - 1$ en produits de facteurs de degré 1 (on pourra utiliser le théorème admis).

Le polynôme $Q(z) = z^5 - 1$ admet pour racines les 5 racines 5_ièmes de l'unité: $e^{2ik\pi/5}$ pour $k = 1, 2, 3, 4, 5$, qui sont deux à deux distinctes.

D'après le théorème admis, on a donc:

$$Q(z) = (z - e^{2i\pi/5}) (z - e^{4i\pi/5}) (z - e^{6i\pi/5}) (z - e^{8i\pi/5}) (z - 1)$$

2b En déduire que $z^5 - 1 = (z - 1) \left(z^2 - 2 \cos \left(\frac{2\pi}{5} \right) z + 1 \right) \left(z^2 - 2 \cos \left(\frac{4\pi}{5} \right) z + 1 \right)$.

On a :

$$\begin{aligned} (z - e^{2i\pi/5}) (z - e^{8i\pi/5}) &= (z - e^{2i\pi/5}) (z - e^{-2i\pi/5}) \\ &= z^2 - z (e^{2i\pi/5} + e^{-2i\pi/5}) + e^{2i\pi/5} e^{-2i\pi/5} = z^2 - 2 \cos \left(\frac{2\pi}{5} \right) z + 1 \end{aligned}$$

et on obtient de même $(z - e^{4i\pi/5}) (z - e^{6i\pi/5}) = z^2 - 2 \cos \left(\frac{4\pi}{5} \right) z + 1$.

Donc:

$$z^5 - 1 = (z - 1) \left(z^2 - 2 \cos \left(\frac{2\pi}{5} \right) z + 1 \right) \left(z^2 - 2 \cos \left(\frac{4\pi}{5} \right) z + 1 \right)$$

2c En déduire que $P(z) = \left(z^2 - 2 \cos \left(\frac{2\pi}{5} \right) z + 1 \right) \left(z^2 - 2 \cos \left(\frac{4\pi}{5} \right) z + 1 \right)$.

On a aussi: $z^5 - 1 = (z - 1) (1 + z + z^2 + z^3 + z^4) = (z - 1)P(z)$

donc $(z - 1)P(z) = (z - 1) \left(z^2 - 2 \cos \left(\frac{2\pi}{5} \right) z + 1 \right) \left(z^2 - 2 \cos \left(\frac{4\pi}{5} \right) z + 1 \right)$

donc pour $z \neq 1$, $P(z) = \left(z^2 - 2 \cos \left(\frac{2\pi}{5} \right) z + 1 \right) \left(z^2 - 2 \cos \left(\frac{4\pi}{5} \right) z + 1 \right)$.

Comme ces deux fonctions sont des polynômes et sont donc continues comme fonctions de la variable réelle x , l'égalité est aussi vraie pour $x = 1$, donc pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$P(z) = \left(z^2 - 2 \cos \left(\frac{2\pi}{5} \right) z + 1 \right) \left(z^2 - 2 \cos \left(\frac{4\pi}{5} \right) z + 1 \right)$$

3 Pour $z \neq 0$, on pose $u = z + \frac{1}{z}$.

3a Exprimer $u^2 + u - 1$ en fonction de $P(z)$ (pour $z \neq 0$).

On a :

$$\begin{aligned} u^2 + u - 1 &= \left(z + \frac{1}{z} \right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} - 1 \\ &= z^2 + 1 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} = \frac{1}{z^2} (z^4 + z^2 + 1 + z^3 + z) = \frac{P(z)}{z^2} \end{aligned}$$

3b En déduire que $P(z) = z^2 \left(u - \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right) \left(u - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)$

Le discriminant du trinôme $u^2 + u - 1 = 0$ est $\Delta = 1 + 4 = 5$ donc les racines sont $u_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$

et $u_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ donc $u^2 + u - 1 = \left(u - \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right) \left(u - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)$

Donc

$$P(z) = z^2 (u^2 + u - 1) = z^2 \left(u - \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right) \left(u - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)$$

3c En déduire une factorisation de P en produit de deux trinômes du second degré.

On a donc:

$$\begin{aligned} P(z) &= z^2 \left(z + \frac{1}{z} - \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right) \left(z + \frac{1}{z} - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) \\ &= \left(z^2 + 1 - \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right)z\right) \left(z^2 + 1 - \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)z\right) \end{aligned}$$

donc :

$$P(z) = \left(z^2 - \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right)z + 1\right) \left(z^2 - \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)z + 1\right)$$

3d En admettant l'unicité d'une décomposition de P sous les formes des questions 2.c.) et 3.c.) (à l'ordre d'écriture des facteurs près), retrouver la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. (trouvée à la question 1.d.)).

Par unicité d'une décomposition de P sous les formes des questions 2.c.) et 3.c.), on a:

$$-2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = -\left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right) \text{ ou } -2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = -\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)$$

Comme $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \geq 0$ et $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ on retrouve $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$.

Partie B :

On suppose $n \geq 2$ et $P(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}$.

4 Montrer que $e^{\frac{i\pi}{n}} \times e^{\frac{2i\pi}{n}} \times e^{\frac{3i\pi}{n}} \times \dots \times e^{\frac{(n-1)i\pi}{n}} = i^{n-1}$.

On a :

$$\begin{aligned} \frac{i\pi}{n} \times e^{\frac{2i\pi}{n}} \times e^{\frac{3i\pi}{n}} \times \dots \times e^{\frac{(n-1)i\pi}{n}} &= e^{\frac{i\pi}{n} + \frac{2i\pi}{n} + \frac{3i\pi}{n} + \dots + \frac{(n-1)i\pi}{n}} \\ &= e^{\frac{i\pi}{n}(1+2+3+\dots+(n-1))} \\ &= e^{\frac{i\pi}{n} \frac{n(n-1)}{2}} = e^{\frac{i\pi}{2}(n-1)} = i^{n-1} \end{aligned}$$

5 Montrer que

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = 2^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \times \dots \times \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$

On a :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) &= \prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}} \left(e^{-\frac{ik\pi}{n}} - e^{\frac{ik\pi}{n}} \right) = \prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}} \left(-2i \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) \right) \\
&= (-2i)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}} \prod_{k=1}^{n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) = (-2i)^{n-1} i^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) \\
&= (-2i^2)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) \\
&= 2^{n-1} \sin \left(\frac{\pi}{n} \right) \times \sin \left(\frac{2\pi}{n} \right) \times \cdots \times \sin \left(\frac{(n-1)\pi}{n} \right)
\end{aligned}$$

6 On pose $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $k = 1, 2, \dots, n-1$.

6a Calculer $P(z_k)$.

$$P(z_k) = 1 + z_k + z_k^2 + \cdots + z_k^{n-1} = 1 \times \frac{1 - z_k^n}{1 - z_k} = \frac{1 - 1}{1 - z_k} = 0 \text{ (on a en effet } z_k \neq 1 \text{ et } z_k^n = 1).$$

6b En déduire la factorisation de P en produits de facteurs de degré 1 (on pourra utiliser le théorème admis).

Comme $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ sont $n-1$ racines deux à deux distinctes du polynôme P de degré $n-1$, d'après le théorème A admis, on a :

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_{n-1}).$$

7 Montrer que

$$n = 2^{n-1} \sin \left(\frac{\pi}{n} \right) \times \sin \left(\frac{2\pi}{n} \right) \times \cdots \times \sin \left(\frac{(n-1)\pi}{n} \right)$$

On a : $P(1) = 1 + 1 + \cdots + 1 = n$ mais aussi :

$$\begin{aligned}
P(1) &= (1 - z_1)(1 - z_2) \cdots (1 - z_{n-1}) \\
&= \left(1 - e^{\frac{2i\pi}{n}} \right) \left(1 - e^{\frac{4i\pi}{n}} \right) \left(1 - e^{\frac{6i\pi}{n}} \right) \cdots \left(1 - e^{\frac{2(n-1)i\pi}{n}} \right) \\
&= \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right)
\end{aligned}$$

Donc :

$$n = 2^{n-1} \sin \left(\frac{\pi}{n} \right) \times \sin \left(\frac{2\pi}{n} \right) \times \cdots \times \sin \left(\frac{(n-1)\pi}{n} \right)$$

8 Soient $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ les points d'affixes respectives $1, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$.

8a Calculer le produit des distances $A_0A_1 \times A_0A_2 \times A_0A_3 \times \cdots \times A_0A_{n-1}$.

$$\begin{aligned} A_0A_1 \times A_0A_2 \times A_0A_3 \times \cdots \times A_0A_{n-1} &= \prod_{k=1}^{n-1} |1 - z_k| = \prod_{k=1}^{n-1} \left| 1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right| \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} \left| e^{\frac{ik\pi}{n}} \left(-2i \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) \right) \right| \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} 2 \left| \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) \right| = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) \end{aligned}$$

car pour $k = 1, \dots, n-1$, $\frac{k\pi}{n} \in [0, \pi]$ donc $\sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) \geq 0$.

Avec 7.), on conclut :

$$A_0A_1 \times A_0A_2 \times A_0A_3 \times \cdots \times A_0A_{n-1} = n$$

8b Montrer que le produit des longueurs des arêtes et des diagonales du polygone $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}$ est égal à $\sqrt{n^n}$ (les arêtes et les diagonales sont les segments $[A_jA_k]$ pour $j \neq k$).

Notons p le produit des longueurs des arêtes et des diagonales du polygone $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}$.

Dans l'expression $\prod_{j=0}^{n-1} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n-1} A_jA_k$, chaque longueur A_jA_k figure deux fois (par exemple A_1A_3 figure pour $j = 1$ et $k = 3$, mais aussi pour $k = 1$ et $j = 3$), donc ce double produit vaut p^2 .

$$\text{Ainsi, } p^2 = \prod_{j=0}^{n-1} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n-1} A_jA_k.$$

Or pour des raisons de symétries qu'on peut deviner (on a affaire à un polygone régulier), la valeur de $\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n-1} A_jA_k$ ne dépend pas de j et vaut donc $A_0A_1 \times A_0A_2 \times A_0A_3 \times \cdots \times A_0A_{n-1}$,

c'est-à-dire n . ceci peut se vérifier par un calcul qu'on ne détaille pas ici. Donc :

$$p^2 = \prod_{j=0}^{n-1} n = n^n$$

donc $p = \sqrt{n^n}$.

Corrigé de l'exercice 2 : On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par: $\forall t \in \mathbb{R}_*^+, \varphi(t) = t + \ln(t)$

1a Montrer que φ est une bijection.

φ est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et $\forall t \in \mathbb{R}_*^+, \varphi'(t) = 1 + \frac{1}{t} > 0$ donc φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$ et continue donc induit une bijection de $\mathbb{R}_*^+$ sur $\left] \lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t), \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) \right[=]-\infty, +\infty[$.

- 1b** Dresser le tableau de variation de son application réciproque φ^{-1} en y faisant figurer les limites aux bornes de son domaine de définition et la valeur de $\varphi^{-1}(1)$.

D'après ce même théorème, φ^{-1} est une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = +\infty$.

De plus $\varphi(t) = 1 \Leftrightarrow t + \ln(t) = 1 \Leftrightarrow t = 1$ car 1 est solution et il n'y en a pas d'autres car φ est bijective d'où :

t	$-\infty$		$+\infty$
$\varphi^{-1}(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

à compléter par $\varphi^{-1}(1) = 1$.

- 2** On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que: $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \ln(\varphi^{-1}(x))$.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

- 2a** Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ en fonction de $\varphi^{-1}(x)$.

φ est une bijection continue strictement monotone de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \varphi'(t) = 1 + \frac{1}{t} > 0$ donc d'après le théorème de la dérivée de la réciproque, φ^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\varphi^{-1})'(x) = \frac{1}{1 + 1/\varphi^{-1}(x)} = \frac{\varphi^{-1}(x)}{1 + \varphi^{-1}(x)}$$

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{(\varphi^{-1})'(x)}{\varphi^{-1}(x)} = \frac{1}{1 + \varphi^{-1}(x)}$$

- 2b** Dresser le tableau de variation de f en y faisant figurer les limites aux bornes de son domaine de définition et la valeur de $f(1)$.

φ^{-1} est à valeurs positives donc $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$. De plus, sans forme indéterminée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ d'où :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow +\infty$

et $f(1) = \ln(\varphi^{-1}(1)) = \ln(1) = 0$.

- 2c** Calculer $f'(1)$ et déterminer l'équation de la tangente T_1 à C_f en son point d'abscisse 1.

De plus, $f'(1) = \frac{1}{1 + \varphi^{-1}(1)} = \frac{1}{2}$ d'où :

$$T_1 : y = \frac{1}{2}(x - 1)$$

- 2d** Montrer: $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x = -\varphi^{-1}(x)$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) + \varphi^{-1}(x) = \ln(\varphi^{-1}(x)) + \varphi^{-1}(x) = \varphi(\varphi^{-1}(x)) = x$$

donc $f(x) - x = -\varphi^{-1}(x)$.

En déduire la position relative de C_f par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$ (c'est-à-dire préciser si C_f est au dessus ou en dessous de Δ). Déterminer la limite de $f(x) - x$ lorsque x tend vers $-\infty$. φ^{-1} est à valeurs positives donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - x < 0$ donc $f(x) < x$ donc C_f est en-dessous de la droite Δ . De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\varphi^{-1}(x) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = 0$.

2e Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$: $f(x) - \ln(x) = -\ln\left(1 + \frac{\ln(t)}{t}\right)$, où $t = \varphi^{-1}(x)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, on pose $t = \varphi^{-1}(x)$ et on a :

$$\begin{aligned} \ln\left(1 + \frac{\ln(t)}{t}\right) &= \ln\left(\frac{t + \ln(t)}{t}\right) = \ln\left(\frac{\varphi(t)}{t}\right) \\ &= \ln\left(\frac{\varphi(\varphi^{-1}(x))}{\varphi^{-1}(x)}\right) = \ln(x) - \ln(\varphi^{-1}(x)) \\ &= \ln(x) - f(x) \end{aligned}$$

donc $f(x) - \ln(x) = -\ln\left(1 + \frac{\ln(t)}{t}\right)$.

En déduire la position relative de C_f par rapport à la courbe $C_{\ln}$ de $\ln$ sur $]1, +\infty[$ et la limite de $f(x) - \ln(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Pour tout $x \in]1, +\infty[$, $t = \varphi^{-1}(x) > \varphi^{-1}(1) = 1$ donc $1 + \frac{\ln(t)}{t} > 1$ donc $\ln\left(1 + \frac{\ln(t)}{t}\right) > 0$ donc $f(x) - \ln(x) < 0$ donc $f(x) < \ln(x)$ donc C_f est en-dessous de la courbe $C_{\ln}$ de $\ln$ sur $]1, +\infty[$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi^{-1}(x) = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$ par croissance comparée donc par composition de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\varphi^{-1}(x))}{\varphi^{-1}(x)} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\ln\left(1 + \frac{\ln(\varphi^{-1}(x))}{\varphi^{-1}(x)}\right)\right) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln(x)) = 0$.

2f Tracer dans un repère orthonormé du plan l'allure de la courbe C_f en y faisant figurer les droites T_1 et Δ , et la courbe $C_{\ln}$.

Tracé approximatif :

2g Montrer que f est une bijection et déterminer $f^{-1}(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème de la bijection, f induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[= \mathbb{R}$.

De plus si $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} y &= f(x) \Leftrightarrow y = \ln(\varphi^{-1}(x)) \Leftrightarrow \varphi^{-1}(x) = e^y \\ &\Leftrightarrow x = \varphi(e^y) \text{ car } \varphi \text{ est bijective} \\ &\Leftrightarrow x = e^y + \ln(e^y) = e^y + y \end{aligned}$$

donc $f^{-1}(y) = e^y + y$.

Ce dernier calcul par équivalence suffit à établir la bijectivité de f , sans utiliser le théorème de la bijection.

Corrigé de l'exercice 3 : Dans cet exercice, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k$$

1 Calculer explicitement a_4 sans symbole $\sum$ (et sans coefficient binomiaux non calculés).

On a :

$$a_4 = b_0 + 4b_1 + 6b_2 + 4b_3 + b_4$$

2 Dans cette question seulement, on suppose que $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ et de premier terme b_0 . Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer a_n en fonction de n, q et b_0 .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = b_0 q^n$ donc :

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_0 q^k = b_0 (1 + q)^n$$

3 Dans cette question seulement, on suppose que $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ et de premier terme b_0 .

3a Démontrer que $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

Vu en TD.

3b En déduire pour $n \in \mathbb{N}$ une expression de a_n en fonction de n, b_0 et r .

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = nr + b_0$ donc :

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (kr + b_0) = r \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k + b_0 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \\ &= rn2^{n-1} + b_0 2^n \end{aligned}$$

4 Retour au cas général.

4a Montrer que si k, n, m sont trois entiers tels que $0 \leq k \leq n \leq m$, alors :

$$\binom{m+1}{n} \binom{n}{k} = \binom{m+1}{k} \binom{m+1-k}{n-k}$$

On a :

$$\begin{aligned} \binom{m+1}{n} \binom{n}{k} &= \frac{(m+1)!n!}{n!(m+1-n)!k!(n-k)!} = \frac{(m+1)!}{(m+1-n)!k!(n-k)!} \\ &= \frac{(m+1)!}{(m+1-k)!k!} \times \frac{(m+1-k)!}{(n-k)!(m+1-n)!} = \binom{m+1}{k} \binom{m+1-k}{n-k} \end{aligned}$$

4b Montrer que si k et m sont deux entiers tels que $0 \leq k \leq m$, alors :

$$\sum_{j=0}^{m-k} (-1)^j \binom{m+1-k}{12^j} = (-1)^{m-k}$$

Soient k, m entiers tels que $0 \leq k \leq m$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m-k} (-1)^j \binom{m+1-k}{j} &= \sum_{j=0}^{m+1-k} (-1)^j \binom{m+1-k}{j} 1^{m+1-k-j} - (-1)^{m+1-k} \\ &= (-1+1)^{m+1-k} - (-1)^{m+1-k} = -(-1)^{m+1-k} = (-1)^{m-k} \end{aligned}$$

4c Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$ le nombre b_{n+1} en fonction de a_{n+1} et des nombres $b_0, b_1, \dots, b_n$.

On a pour tout n :

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} b_k = \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} b_k + b_{n+1}$$

donc :

$$b_{n+1} = a_{n+1} - \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} b_k$$

4d Montrer la formule d'inversion de Pascal :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a_k$$

Montrons cette formule par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$.

- I. : $n = 0$. La formule s'écrit $b_0 = a_0$, ce qui est vrai.
- H.: Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\forall k \in [0, n]$, $b_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} a_j$. Alors d'après la

question précédente :

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= a_{n+1} - \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} b_k = a_{n+1} - \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} a_j \\
&= a_{n+1} - \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \binom{n+1}{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} a_j \\
&= a_{n+1} - \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \binom{n+1}{j} \binom{n+1-j}{k-j} (-1)^{k-j} a_j \text{ d'après 4a} \\
&= a_{n+1} - \sum_{j=0}^n \sum_{k=j}^n \binom{n+1}{j} \binom{n+1-j}{k-j} (-1)^{k-j} a_j \\
&= a_{n+1} - \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n+1}{j} \binom{n+1-j}{i} (-1)^i a_j \text{ avec } i = k - j \\
&= a_{n+1} - \sum_{j=0}^n \binom{n+1}{j} a_j \left(\sum_{i=0}^{n-j} \binom{n+1-j}{i} (-1)^i \right) \\
&= a_{n+1} - \sum_{j=0}^n \binom{n+1}{j} a_j (-1)^{n-j} \text{ d'après 4b} \\
&= a_{n+1} + \sum_{j=0}^n \binom{n+1}{j} a_j (-1)^{n+1-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a_j (-1)^{n+1-j}
\end{aligned}$$

- Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a_k$.

On considère à présent la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $e_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $e_n = ne_{n-1} + (-1)^n$ et la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e_k$$

5 Calculer e_k pour k variant de 1 à 5 puis f_k pour k variant de 0 à 5.

On a $e_1 = 0$, $e_2 = 1$, $e_3 = 2$, $e_4 = 9$ et $e_5 = 44$ d'où :

- $f_0 = e_0 = 1$
- $f_1 = e_0 + e_1 = 1$
- $f_2 = e_0 + 2e_1 + e_2 = 2$
- $f_3 = 6$
- $f_4 = 24$
- $f_5 = 5!$

6 Déterminer une expression de f_n en fonction de n .

Montrons que $f_n = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
 f_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} e_k = e_0 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} e_k \\
 &= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (k e_{k-1} + (-1)^k) \\
 &= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} k \binom{n+1}{k} e_{k-1} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} (n+1) \binom{n}{k-1} e_{k-1} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k 1^{n+1-k} \\
 &= (n+1) \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} e_{k-1} + (1-1)^{n+1} \\
 &= (n+1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e_k = (n+1) f_n
 \end{aligned}$$

et puisque $f_0 = 1$, il vient $f_n = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7 En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule d'inversion de Pascal, on a :

$$\begin{aligned}
 e_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k! \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} (-1)^{n-k} = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \\
 &= n! \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!} \text{ en posant } j = n - k.
 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 4 :

Soit $\alpha \in [2\pi, 4\pi[$. Pour $x \in]0, \pi[$, on pose $g(x) = \frac{\alpha - x}{\sin(x)} e^{(\alpha-x) \frac{\cos(x)}{\sin(x)}}$.

1 Déterminer la limite de $g(x)$ quand x tend vers 0^+ (on a toujours $x \in]0, \pi[$).

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\alpha - x}{\sin(x)} = +\infty$ car $\alpha > 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(x) = 0^+$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\alpha - x) \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{(\alpha-x) \frac{\cos(x)}{\sin(x)}} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$.

2 On pose $h(x) = \frac{\alpha - x}{\sin(x)}$ pour $x \in]0, \pi[$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\ln(g(x))}{h(x)} = -1$.

Pour $x \in]0, \pi[$, on a :

$$\frac{\ln(g(x))}{h(x)} = \frac{\ln\left(\frac{\alpha-x}{\sin(x)}\right) + (\alpha-x)\frac{\cos(x)}{\sin(x)}}{\frac{\alpha-x}{\sin(x)}} = \frac{\ln(h(x))}{h(x)} + \cos(x)$$

Or $\lim_{x \rightarrow \pi^-} h(x) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow \pi^-} (\alpha - x) = \alpha - \pi > 0$. De plus, $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y} = 0$ (croissance comparée) donc par composition de limites, $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\ln(h(x))}{h(x)} = 0$.

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\ln(g(x))}{h(x)} = -1.$$

3 En déduire la limite de $g(x)$ quand x tend vers π^- .

Sachant que $\lim_{x \rightarrow \pi^-} h(x) = +\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \ln(g(x)) = -\infty$ et par composition avec l'exponentielle, $\lim_{x \rightarrow \pi^-} g(x) = 0$.

4 Montrer que $\text{Im}(g) = \mathbb{R}^{+*}$ (on rappelle que g n'est définie que pour $x \in]0, \pi[$, on ne s'occupe pas d'autres valeurs possibles de x).

Il faut montrer deux choses :

d'abord pour tout $x \in]0, \pi[$, $\sin(x) > 0$, $\alpha - x > 0$ donc $g(x) > 0$. Donc $\text{Im}(g) \subset \mathbb{R}^{+*}$.

et la réciproque : soit $r \in \mathbb{R}^{+*}$, g est continue sur $]0, \pi[$ en tant que quotient, produit et composée de fonctions continues, et $r \in \mathbb{R}^{+*} = \left] \lim_{x \rightarrow \pi^-} g(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \right[$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in]0, \pi[$ tel que $g(x) = r$. Donc $\mathbb{R}^{+*} \subset \text{Im}(g)$.

Ainsi, $\text{Im}(g) = \mathbb{R}^{+*}$.

On considère à présent la fonction $f : z \mapsto f(z) = ze^z$ définie pour $z \in \mathbb{C}$ et à valeurs complexes. Soit $Z = re^{i\alpha}$ avec $r > 0$ et $\alpha \in [2\pi, 4\pi[$. On pose $z = \rho e^{ix}$ avec $\rho > 0$ et $x \in]0, \pi[$.

5 Montrer que $f(z) = Z \iff \begin{cases} r = g(x) \\ \rho = h(x) \end{cases}$.

$$\begin{aligned} f(z) = Z &\iff ze^z = re^{i\alpha} \iff \rho e^{ix} e^{\rho e^{ix}} = re^{i\alpha} \iff \rho e^{\rho \cos(x)} e^{i(x + \rho \sin(x))} = re^{i\alpha} \\ &\iff \begin{cases} \rho e^{\rho \cos(x)} = r \\ \alpha = x + \rho \sin(x) \end{cases} \iff \begin{cases} \rho e^{\rho \cos(x)} = r \\ \rho = \frac{\alpha - x}{\sin(x)} \end{cases} \text{ car } \sin(x) \neq 0 \text{ (} x \in]0, \pi[\text{)} \\ &\iff \begin{cases} r = h(x) e^{h(x) \cos(x)} \\ \rho = h(x) \end{cases} \iff \begin{cases} r = g(x) \\ \rho = h(x) \end{cases} \end{aligned}$$

6 Montrer que f est surjective.

Si $Z = 0$, Z admet un antécédent par f car $f(0) = 0$.

Si $Z \neq 0$, on écrit $Z = re^{i\alpha}$ avec $r > 0$ et $\alpha \in [2\pi, 4\pi[$.

Puisque $\text{Im}(g) = \mathbb{R}^{+*}$, il existe $x \in]0, \pi[$ tel que $r = g(x)$. On pose alors $\rho = h(x)$ et $z = \rho e^{ix}$ (on a bien $\rho > 0$ et $x \in]0, \pi[$). D'après la question précédente, on a $\begin{cases} r = g(x) \\ \rho = h(x) \end{cases}$ donc $f(z) = Z$.

Ainsi, Z admet un antécédent par f .

Donc f est surjective.