

D.S.3 samedi 22 Novembre 2025 (3h)

Exercice 1 : On considère la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{2x^2}{1+x^2} - \ln(1+x^2) \end{cases}$.

- 1 Etudier cette fonction : parité, variations et limites. Tracer son graphe.
- 2 Montrer que f s'annule une et une seule fois sur l'intervalle $]0, +\infty[$. On notera α l'unique réel strictement positif tel que $f(\alpha) = 0$.
- 3 Déterminer le signe de f sur $\mathbb{R}^+$.
- 4 Exprimer l'intégrale $\int_0^1 \ln(1+x^2) dx$ en fonction de $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$.
- 5 Calculer $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$ puis $\int_0^1 f(x) dx$.

Exercice 2 : Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

- 1 $y'' + y' - 6y = 1 - 8x - 30x^2$
- 2 $y'' + y' - 2y = 8 \sin(2x)$.

Exercice 3 : On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}$.

- 1 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$.

2a Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

2b En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq u_0 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$.

- 3 Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Dans la dernière question, on pose $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $v_n = u_n^2$.

4a Exprimer v_n en fonction de n (indication : on pourra calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$).

4b En déduire la valeur de l .

Problème 1 : une EDL d'ordre 2 à coefficients non constants. On s'intéresse ici à la résolution sur $I =]0, +\infty[$ de l'équation différentielle :

$$(E) : y'' - \frac{2x}{1+x^2} y' + \frac{2}{1+x^2} y = (1+x^2) \ln(x)$$

On notera (E_0) l'équation homogène associée.

Partie A : calculs préliminaires.

1 Montrer qu'il existe des réels a, b, c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}$$

2 En déduire une primitive de $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{1}{x(1+x^2)}$.

3 Donner une primitive de $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(x) = (1-x^2) \ln(x)$.

4 Donner une primitive de $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $h(x) = x \ln(x)$.

Partie B : résolution de l'équation homogène.

5 Montrer que $id : x \mapsto x$ est solution de (E_0) .

6 Soit $y_0 : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable. On pose $z : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $z(x) = \frac{1}{x} y_0(x)$.

Montrer que y_0 est solution de (E_0) si et seulement si z' est solution de l'équation différentielle en la fonction inconnue u :

$$(E') : xu' + \frac{2}{1+x^2}u = 0$$

7 Résoudre (E') .

8 Donner l'ensemble des solutions de (E_0) .

Partie C : résolution de (E) par variation des constantes. On cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y_1(x) = \lambda(x)x + \mu(x)(x^2-1)$ où λ et μ sont deux fonctions dérivables sur I et vérifiant $\forall x \in I, x\lambda'(x) + \mu'(x)(x^2-1) = 0$.

9 Exprimer y_1' et y_1'' en fonction de λ et μ .

10 Montrer que y_1 est solution de (E) si et seulement si $\forall x \in I, \lambda'(x) + 2x\mu'(x) = (x^2+1) \ln(x)$.

11 Déterminer λ' et μ' à l'aide des questions précédentes, puis en déduire une solution particulière y_1 de (E) .

12 Conclure le problème en donnant l'ensemble des solutions de (E) .

Problème 2 : Autour de la série harmonique.

1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_p = \sum_{k=0}^p \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+p}$.

1a Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$.

1b En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_p \geq \ln\left(\frac{n+p+1}{n}\right)$.

1c Etudier la monotonie et la limite de la suite $(S_p)_{p \in \mathbb{N}}$.

2a Justifier qu'il existe un entier naturel p_n qui est le plus petit des entiers p tels que $S_p = \sum_{k=0}^p \frac{1}{n+k} > 1$.

On note alors $a_n = n + p_n$ et $u_n = \frac{a_n}{n}$.

2b La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?

3 Prouver pour $n \geq 2$ que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} < 1$$

4 Montrer par récurrence sur $n \geq 2$ que :

$$\sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n-2} > 1$$

5 Montrer que si la suite (u_n) converge vers une limite l , alors $l \in [2, 3]$.

6 Justifier que l'on a pour tout entier naturel non nul n :

$$1 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leq 1 + \frac{1}{a_n}$$

7a Soit $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$.

7b En déduire que l'on a pour tout entier naturel non nul n :

$$\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leq \int_n^{a_n} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{a_n - 1}$$

8 Déduire des questions 6 et 7 que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Corrigé de l'exercice 1 : On considère la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{2x^2}{1+x^2} - \ln(1+x^2) \end{cases}$.

1 Etudier cette fonction : parité, variations et limites. Tracer son graphe.

$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$ donc f est paire donc on l'étudie sur $\mathbb{R}^+$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme quotient, somme et composée de fonctions dérivables et pour tout $x \geq 0$, $f(x) = 2 - \frac{2}{1+x^2} - \ln(1+x^2)$ donc :

$$f'(x) = \frac{4x}{(1+x^2)^2} - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2x(2-1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

donc $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$ (car $x \in \mathbb{R}^+$). D'où le tableau de variations suivant :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$0 \nearrow$	$1 - \ln(2)$	$\searrow -\infty$

En effet, pour $x \geq 0$, $f(x) = \frac{2}{1+1/x^2} - \ln(1+x^2)$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. D'où le graphe (...).

2 Montrer que f s'annule une et une seule fois sur l'intervalle $]0, +\infty[$. On notera α l'unique réel strictement positif tel que $f(\alpha) = 0$.

f est continue et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ (f' ne s'annule qu'en 1), donc d'après le théorème de la bijection continue strictement monotone, f induit une bijection de $[1, +\infty[$ sur $]-\infty, 1 - \ln(2)]$ (vu le tableau de variations ci-dessus). Or $0 \in]-\infty, 1 - \ln(2)]$ donc 0 admet un unique antécédent α par f dans $[1, +\infty[$. Comme $f(0) = 0$ et f strictement croissante sur $[0, 1]$, f ne s'annule pas sur $]0, 1]$. Donc α est bien l'unique réel strictement positif tel que $f(\alpha) = 0$.

3 Déterminer le signe de f sur $\mathbb{R}^+$.

Vu la tableau de variations et la question précédente, f est positive sur $[0, \alpha]$ et négative sur $]\alpha, +\infty[$.

4 Exprimer l'intégrale $\int_0^1 \ln(1+x^2) dx$ en fonction de $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$.

On intègre par parties en posant $\begin{cases} u(x) = \ln(1+x^2) \\ v(x) = x \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ et :

$$\int_0^1 \ln(1+x^2) dx = [x \ln(1+x^2)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2} dx = \ln(2) - 2 \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx.$$

5 Calculer $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$ puis $\int_0^1 f(x) dx$.

On a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx &= \int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\ &= [x - \arctan(x)]_0^1 = 1 - \arctan(1) - 0 + \arctan(0) \\ &= 1 - \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\frac{2x^2}{1+x^2} - \ln(1+x^2) \right) dx &= 2 \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx - \int_0^1 \ln(1+x^2) dx \\ &= -\ln(2) + 4 \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx \\ &= -\ln(2) + 4 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 4 - \ln(2) - \pi\end{aligned}$$

Exercice 2 : Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1 $y'' + y' - 6y = 1 - 8x - 30x^2$

L'équation homogène associée, $(E_0) : y'' + y' - 6y = 0$ a pour équation caractéristique $r^2 + r - 6 = 0$, $\Delta = 25 = 5^2$, les racines sont $r = -3$ et $r = 2$ donc la solution générale de (E_0) est :

$$y(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{-3x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

On cherche une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme $y_1 = ax^2 + bx + c$, d'où $y'_1 = 2ax + b$ et $y''_1 = 2a$ d'où :

$$y''_1 + y'_1 - 6y_1 = 1 - 8x - 30x^2 \Leftrightarrow -6ax^2 + (2a - 6b)x + (2a + b - 6c) = 1 - 8x - 30x^2$$

d'où le système à résoudre :

$$\begin{cases} -6a = -30 \\ 2a - 6b = -8 \\ 2a + b - 6c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \\ c = 2 \end{cases}$$

et la solution générale de l'équation :

$$y(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{-3x} + 5x^2 + 3x + 2, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

2 $y'' + y' - 2y = 8 \sin(2x)$.

L'équation homogène associée, $(E_0) : y'' + y' - 2y = 0$ a pour équation caractéristique $r^2 + r - 2 = 0$, $\Delta = 9 = 3^2$, les racines sont $r = 1$ et $r = -2$ donc la solution générale de (E_0) est :

$$y(x) = \lambda e^x + \mu e^{-2x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

On cherche une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme $y_1 = A \cos(2x) + B \sin(2x)$, d'où $y'_1 = -2A \sin(2x) + 2B \cos(2x)$ et $y''_1 = -4A \cos(2x) - 4B \sin(2x)$ d'où :

$$y''_1 + y'_1 - 2y_1 = 8 \sin(2x) \Leftrightarrow (-4A + 2B - 2A) \cos(2x) + (-4B - 2A - 2B) \sin(2x) = 8 \sin(2x)$$

Il suffit d'avoir :

$$\begin{cases} -6A + 2B = 0 \\ -6B - 2A = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{-2}{5} \\ B = \frac{-6}{5} \end{cases}$$

d'où la solution particulière $y_1(x) = -\frac{2}{5} \cos(2x) - \frac{6}{5} \sin(2x)$ et la solution générale de l'équation :

$$y(x) = -\frac{2}{5} \cos(2x) - \frac{6}{5} \sin(2x) + \lambda e^x + \mu e^{-2x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Corrigé de l'exercice 3 : On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} =$

$$\sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}.$$

1 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$.

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

- I.: $n = 0, u_n = 1 \geq 1$ OK.
- H.: soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $u_n \geq 1$. Alors $u_n^2 + \frac{1}{2^n} \geq 1$ donc $u_{n+1} \geq 1$.
- Conc.: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$.

2a Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

Puisque $u_n \geq 0$, on a $u_n = \sqrt{u_n^2}$ donc $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}} - \sqrt{u_n^2} \geq 0$ car $u_n^2 + \frac{1}{2^n} \geq u_n^2 \geq 0$.

De plus :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &\leq \frac{1}{2^{n+1}} \Leftrightarrow \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}} \leq u_n + \frac{1}{2^{n+1}} \\ &\Leftrightarrow u_n^2 + \frac{1}{2^n} \leq \left(u_n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)^2 \text{ car tout est positif} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^n} u_n + \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2 \end{aligned}$$

et cette dernière inégalité est vraie car $u_n \geq 1$ donc $\frac{1}{2^n} u_n \geq \frac{1}{2^n}$ donc $\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^n} u_n + \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2$.

Donc $u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

2b En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq u_0 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$

On a donc pour tout $k \in \mathbb{N}, u_{k+1} - u_k \leq \frac{1}{2^{k+1}}$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on somme ces inégalités de 0 à $n-1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}}$$

i.e. par télescopage (somme de gauche) et réindication (somme de droite) :

$$u_n - u_0 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$$

3 Montrer que la suite (u_n) est convergente.

On a donc :

$$\begin{aligned} u_n &\leq u_0 + \frac{1}{2} \frac{1 - 1/2^n}{1 - 1/2} \\ &\leq 1 + 1 - \frac{1}{2^n} \leq 2 \end{aligned}$$

donc (u_n) est majorée. Or d'après 2a, elle est croissante donc d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) est convergente.

Dans la dernière question, on pose $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $v_n = u_n^2$.

4a Exprimer v_n en fonction de n (indication : on pourra calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$).

On a par télescopage :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_n - v_0$$

D'autre part :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^2 - u_k^2) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1 - 1/2^n}{1 - 1/2}$$

$$\text{donc } v_n = v_0 + 2 - \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

4b En déduire la valeur de l .

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{3}$ car $u_n \geq 0$ donc $u_n = \sqrt{v_n}$.

Problème 1 : une EDL d'ordre 2 à coefficients non constants. On s'intéresse ici à la résolution sur $I =]0, +\infty[$ de l'équation différentielle :

$$(E) : y'' - \frac{2x}{1+x^2} y' + \frac{2}{1+x^2} y = (1+x^2) \ln(x)$$

On notera (E_0) l'équation homogène associée.

Partie A : calculs préliminaires.

1 Montrer qu'il existe des réels a, b, c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}$$

On a :

$$\frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2} = \frac{ax^2 + a + bx^2 + cx}{x(1+x^2)} = \frac{(a+b)x^2 + cx + a}{1+x^2}$$

donc il suffit de résoudre un système :

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ c = 0 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ c = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

- 2** En déduire une primitive de $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{1}{x(1+x^2)}$.

Une primitive de $f(x) = \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$ sur I est donc $F(x) = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$.

- 3** Donner une primitive de $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(x) = (1-x^2) \ln(x)$.

Intégrons par partie en posant $\begin{cases} u(x) = x - \frac{1}{3}x^3 \\ v(x) = \ln(x) \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u'(x) = 1 - x^2 \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$ et une primitive de $g(x)$ sur I est :

$$G(x) = \left[\left(x - \frac{1}{3}x^3 \right) \ln(x) \right] - \int^x \left(1 - \frac{t^2}{3} \right) dt = \left(x - \frac{1}{3}x^3 \right) \ln(x) - x + \frac{x^3}{9}.$$

- 4** Donner une primitive de $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $h(x) = x \ln(x)$.

Intégrons par partie en posant $\begin{cases} u(x) = \frac{x^2}{2} \\ v(x) = \ln(x) \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u'(x) = x \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$ et une primitive de $h(x)$ sur I est :

$$H(x) = \left[\frac{x^2}{2} \ln(x) \right] - \int^x \frac{t}{2} dt = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4}.$$

Partie B : résolution de l'équation homogène.

- 5** Montrer que $id : x \mapsto x$ est solution de $(E_0) : y'' - \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{2}{1+x^2}y = 0$.

On a $(id)'(x) = 1$ et $(id)''(x) = 0$ pour tout x donc :

$$id''(x) - \frac{2x}{1+x^2}id'(x) + \frac{2}{1+x^2}id(x) = -\frac{2x}{1+x^2} + \frac{2}{1+x^2}x = 0$$

donc id est bien solution de (E_0) .

- 6** Soit $y_0 : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable. On pose $z : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $z(x) = \frac{1}{x}y_0(x)$.

Montrer que y_0 est solution de (E_0) si et seulement si z' est solution de l'équation différentielle en la fonction inconnue u :

$$(E') : xu' + \frac{2}{1+x^2}u = 0$$

z est deux fois dérivable comme quotient de deux fonctions qui le sont et on a $y_0(x) = xz(x)$,

donc $y_0'(x) = z(x) + xz'(x)$ et $y_0''(x) = 2z'(x) + xz''(x)$ donc :

$$\begin{aligned}
 y_0 \text{ est solution de } (E_0) &\Leftrightarrow y_0'' - \frac{2x}{1+x^2}y_0' + \frac{2}{1+x^2}y_0 = 0 \\
 &\Leftrightarrow 2z'(x) + xz''(x) - \frac{2x}{1+x^2}(z(x) + xz'(x)) + \frac{2}{1+x^2}xz(x) = 0 \\
 &\Leftrightarrow xz''(x) + z'(x) \left(2 - \frac{2x^2}{1+x^2}\right) = 0 \Leftrightarrow xz''(x) + \frac{2}{1+x^2}z'(x) = 0 \\
 &\Leftrightarrow z' \text{ est solution de } (E')
 \end{aligned}$$

7 Résoudre (E') .

On a $(E') \Leftrightarrow u' + \frac{2}{x(1+x^2)}u = 0$ car on résoud sur I donc $x \neq 0$.

D'après 2, une primitive de $x \mapsto \frac{2}{x(1+x^2)}$ est $2F(x) = 2\ln(x) - \ln(1+x^2)$ donc la solution générale de (E') est :

$$y_{E'}(x) = \lambda e^{-2F(x)} = \lambda e^{-2\ln(x) + \ln(1+x^2)} = \frac{\lambda}{x^2} (1+x^2) = \lambda \left(1 + \frac{1}{x^2}\right), \lambda \in \mathbb{R}$$

8 Donner l'ensemble des solutions de (E_0) .

On a donc z' de la forme $z'(x) = \lambda \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ donc $z(x) = \lambda x - \frac{\lambda}{x} + \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ donc les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme :

$$y_0(x) = \lambda x^2 - \lambda + \mu x, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Partie C : résolution de (E) par variation des constantes. On cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y_1(x) = \lambda(x)x + \mu(x)(x^2 - 1)$ où λ et μ sont deux fonctions dérivables sur I et vérifiant $\forall x \in I, x\lambda'(x) + \mu'(x)(x^2 - 1) = 0$.

9 Exprimer y_1' et y_1'' en fonction de λ et μ .

On a :

$$\begin{aligned}
 y_1'(x) &= \lambda'(x)x + \lambda(x) + \mu'(x)(x^2 - 1) + 2x\mu(x) = \lambda(x) + 2x\mu(x) \\
 y_1''(x) &= \lambda'(x) + 2\mu(x) + 2x\mu'(x)
 \end{aligned}$$

10 Montrer que y_1 est solution de (E) si et seulement si $\forall x \in I, \lambda'(x) + 2x\mu'(x) = (x^2 + 1)\ln(x)$.

Donc y_1 solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
 \dots &\Leftrightarrow \forall x \in I, y_1'' - \frac{2x}{1+x^2}y_1' + \frac{2}{1+x^2}y_1 = (1+x^2)\ln(x) \\
 &\Leftrightarrow \forall x \in I, \lambda'(x) + 2\mu(x) + 2x\mu'(x) - \frac{2x}{1+x^2}(\lambda(x) + 2x\mu(x)) + \frac{2}{1+x^2}(\lambda(x)x + \mu(x)(x^2 - 1)) \\
 &\Leftrightarrow \forall x \in I, \lambda'(x) + \mu(x) \left(2 - \frac{4x^2}{1+x^2} + \frac{2(x^2 - 1)}{1+x^2}\right) + 2x\mu'(x) = (1+x^2)\ln(x) \\
 &\Leftrightarrow \forall x \in I, \lambda'(x) + 2x\mu'(x) = (1+x^2)\ln(x)
 \end{aligned}$$

- 11** Déterminer λ' et μ' à l'aide des questions précédentes, puis en déduire une solution particulière y_1 de (E) .

On cherche donc $\lambda(x)$ et $\mu(x)$ vérifiant (pour tout $x \in I$) un système d'équations :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x\lambda'(x) + \mu'(x)(x^2 - 1) = 0 \\ \lambda'(x) + 2x\mu'(x) = (1 + x^2)\ln(x) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda'(x) + 2x\mu'(x) = (1 + x^2)\ln(x) & L_2 \\ \mu'(x)((x^2 - 1) - 2x^2) = -x(1 + x^2)\ln(x) & L_1 - xL_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda'(x) + 2x\mu'(x) = (1 + x^2)\ln(x) \\ \mu'(x)(-1 - x^2) = -x(1 + x^2)\ln(x) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda'(x) + 2x\mu'(x) = (1 + x^2)\ln(x) \\ \mu'(x) = x\ln(x) \end{cases} \end{aligned}$$

On peut prendre d'après 4, $\mu(x) = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}$ d'où $\lambda'(x) = (1 + x^2)\ln(x) - 2x^2\ln(x) = (1 - x^2)\ln(x)$ donc d'après 3, $\lambda(x) = \left(x - \frac{1}{3}x^3\right)\ln(x) - x + \frac{x^3}{9}$.

Ainsi, $y_1(x) = x\left(\left(x - \frac{1}{3}x^3\right)\ln(x) - x + \frac{x^3}{9}\right) + \left(\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}\right)(x^2 - 1) = \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{6}x^4\ln x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{36}x^4$ est une solution particulière de (E) .

- 12** Conclure le problème en donnant l'ensemble des solutions de (E)

Ainsi, la solution générale de (E) est :

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{6}x^4\ln x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{36}x^4 + \lambda x^2 - \lambda + \mu x, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$y'' - \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{2}{1+x^2}y = (1+x^2)\ln(x),$$

$$\text{Exact solution is: } \left\{ \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{6}x^4\ln x + C_{17}(x^2 - 1) + C_{18}x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{36}x^4 \right\}$$

Corrigé du problème 2 : Autour de la série harmonique.

- 1** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_p = \sum_{k=0}^p \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+p}$.

- 1a** Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$.

On a vu en cours que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$, on prend donc $x = \frac{1}{k}$.

- 1b** En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_p \geq \ln\left(\frac{n+p+1}{n}\right)$.

Ainsi, pour tout $k \in [0, n]$, $\ln\left(1 + \frac{1}{n+k}\right) \leq \frac{1}{n+k}$. On somme ces inégalités de $k = 0$ à p :

$$\sum_{k=0}^p \ln\left(1 + \frac{1}{n+k}\right) \leq \sum_{k=0}^p \frac{1}{n+k} = S_p$$

Or on a une somme télescopique :

$$\sum_{k=0}^p \ln \left(1 + \frac{1}{n+k} \right) = \sum_{k=0}^p \ln \left(\frac{n+k+1}{n+k} \right) = \sum_{k=0}^p (\ln(n+k+1) - \ln(n+k)) = \ln(n+p+1) - \ln(n).$$

Donc :

$$S_p \geq \ln(n+p+1) - \ln(n) = \ln \left(\frac{n+p+1}{n} \right)$$

1c Etudier la monotonie et la limite de la suite $(S_p)_{p \in \mathbb{N}}$.

Pour tout p , $S_{p+1} - S_p = \frac{1}{n+p+1} \geq 0$ donc $(S_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est croissante.

D'autre part, $\lim_{p \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{n+p+1}{n} \right) = +\infty$ donc (vu 1b), par théorème de comparaison, $\lim_{p \rightarrow +\infty} S_p = +\infty$.

2a Justifier qu'il existe un entier naturel p_n qui est le plus petit des entiers p tels que $S_p = \sum_{k=0}^p \frac{1}{n+k} > 1$.

On note alors $a_n = n + p_n$ et $u_n = \frac{a_n}{n}$.

Puisque $(S_p)_p$ tend vers $+\infty$, il existe un rang à partir duquel S_p dépasse 1 donc n_0 tel que $S_{n_0} > 1$. On prend p_n le plus petit entier entre 0 et n_0 qui vérifie cette propriété (il y a un nombre fini d'entiers donc sans aucun doute un plus petit que les autres !)

2b La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?

On a pour tout n , $a_n \geq n$ donc encore par théorème de comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$. Donc la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est divergente.

3 Prouver pour $n \geq 2$ que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} < 1$$

Pour tout $k \in [1, n-1]$, $\frac{1}{n+k} < \frac{1}{n}$ donc $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n+k} < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$ donc :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} < \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} = 1.$$

4 Montrer par récurrence sur $n \geq 2$ que :

$$\sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n-2} > 1$$

Montrons par récurrence sur $n \geq 2$ que $\sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} > 1$.

- I.: $n = 2$, $\sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=0}^2 \frac{1}{2+k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$.
- H. : Soit $n \geq 2$. Supposons $\sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} > 1$. Alors on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2(n+1)-2} \frac{1}{n+1+k} &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{n+1+k} = \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n} + \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} \\ &> 1 + \frac{3n+1+3n-1}{(3n-1)(3n+1)} - \frac{2}{3n} = 1 + \frac{18n^2 - 2(3n-1)(3n+1)}{3n(3n-1)(3n+1)} \\ &= 1 + \frac{2}{3n(3n-1)(3n+1)} > 1 \end{aligned}$$

- Conclusion : pour tout $n \geq 2$, $\sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} > 1$.

5 Montrer que si la suite (u_n) converge vers une limite l , alors $l \in [2, 3]$.

Pour $n \geq 2$, on a donc $S_{n-1} < 1 < S_{2n-2}$, et par définition de p_n , $S_{p_n-1} < 1 < S_{p_n}$. Et puisque (S_p) est croissante, il vient :

$$n-1 \leq p_n-1 < p_n \leq 2n-2$$

donc $n \leq p_n \leq 2n-2$ donc $2n \leq a_n \leq 3n-2 \leq 3n$ donc $2 \leq u_n \leq 3$.

Donc si (u_n) converge vers une limite l , on obtient par passage à la limite, $2 \leq l \leq 3$.

6 Justifier que l'on a pour tout entier naturel non nul n :

$$1 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{a_n} \leq 1 + \frac{1}{a_n}$$

Par définition de p_n (et $a_n = n + p_n$), on a :

$$1 < S_{p_n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{a_n} \text{ et } \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{a_n-1} \leq 1$$

$$\text{donc } \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{a_n} \leq 1 + \frac{1}{a_n}.$$

7a Soit $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$.

Soit ensuite $k \in \mathbb{N}^*$, on a pour tout $t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$ par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Donc par intégration des inégalités :

$$\frac{1}{k+1} = \int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k} = \frac{1}{k}$$

7b En déduire que l'on a pour tout entier naturel non nul n :

$$\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{a_n} \leq \int_n^{a_n} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{a_n-1}$$

Donc en sommant ces inégalités de $k = n$ à $k = a_n - 1$:

$$\sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=n}^{a_n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \int_n^{a_n} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k}$$

Et par la relation de Chasles :

$$1 - \frac{1}{n} < \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{a_n} \leq \int_n^{a_n} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{a_n-1} \leq 1$$

8 Dédurre des questions 6 et 7 que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

D'après 6, on a :

$$1 - \frac{1}{n} < \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{a_n} \text{ et } \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{a_n-1} \leq 1$$

donc grâce à 7b :

$$1 - \frac{1}{n} < \int_n^{a_n} \frac{dt}{t} \leq 1$$

Or $\int_n^{a_n} \frac{dt}{t} = [\ln(t)]_n^{a_n} = \ln\left(\frac{a_n}{n}\right) = \ln(u_n)$. Donc $1 - \frac{1}{n} < \ln(u_n) \leq 1$ donc :

$$e^{1-1/n} \leq u_n \leq e^1$$

Et puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{1-1/n} = e$, on a par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$.