

D.S.4 13 Décembre 2025 (2h)

Exercice 1 : Soient f et g des fonctions définies et continues sur $[0, 1]$, à valeurs réelles.

1 Ecrire avec des quantificateurs la propriété "les graphes de f et g se coupent".

2 On suppose que $\sup_{x \in [0,1]} f(x) = \sup_{x \in [0,1]} g(x)$.

2a Justifier qu'il existe $a, b \in [0, 1]$ tels que $f(a) = g(b)$.

2b En considérant $h = f - g$, montrer que les graphes de f et de g se coupent.

Exercice 2 :

Partie A : on considère l'application $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto g(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

1 Dresser le tableau de variations de g en y faisant figurer les limites aux bornes de son domaine de définition.

2 Dans cette question, et seulement dans celle-ci, aucune justification n'est demandée. Donner, suivant la valeur du paramètre réel k , le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $g(x) = k$, et préciser la position des solutions éventuelles par rapport à 0, 1 et e (les résultats seront présentés avec clarté, éventuellement dans un tableau).

Partie B : Soit k un réel strictement positif. On considère la suite réelle (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{kx}$.

1 Justifier que si (u_n) converge vers un réel L , alors $L > 0$ et $g(L) = k$.

2 Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

3 Dans cette question, on suppose $k \in \left]0, \frac{1}{e}\right]$.

3a Justifier que (u_n) converge vers un réel L et que l'on a $L \in]1, e]$.

3b Quelle est la valeur de L lorsque $k = \frac{1}{e}$?

4 Déterminer la limite de (u_n) lorsque $k > \frac{1}{e}$.

Problème : fonctions lipschitziennes et équation fonctionnelle. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et k un réel.

On dit que f est k -lipschitzienne sur I (ou lipschitzienne de rapport k) si on a :

$$\forall x, x' \in I, |f(x) - f(x')| \leq k|x - x'|$$

On dit que f est lipschitzienne s'il existe un réel k tel que f soit lipschitzienne de rapport k .

Partie 1 : Soit une fonction $h :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

1 Soit $c > 0$. On note $I_1 =]0, c]$, $I_2 = [c, +\infty[$.

Montrer que si h est K_1 -lipschitzienne sur l'intervalle I_1 et que h est K_2 -lipschitzienne sur l'intervalle I_2 , alors h est K -lipschitzienne sur l'intervalle $]0, +\infty[$ pour une valeur de K que l'on précisera.

Dans la suite du problème, on s'intéresse aux fonctions $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ et vérifiant:

$$\forall x \in]0, +\infty[, f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$$

Une telle fonction est dite solution du problème (P)

Partie 2 : On suppose dans cette partie que f est une solution du problème (P).

2 Justifier que f n'est pas injective

3a Montrer que si f est croissante alors f est constante

3b Montrer que si f est croissante sur $]0, 1]$ alors f est décroissante sur $[1, +\infty[$

4 Montrer que f admet une limite en 0 si et seulement si f admet une limite en $+\infty$.

Partie 3 : On suppose dans cette partie que f est une solution du problème (P).

5 On suppose dans cette question que f est lipschitzienne sur $]0, 1]$.

5a Montrer que f est lipschitzienne sur $[1, +\infty[$

5b Que peut on en déduire?

6 On suppose que $\forall x \in]0, 1], f(x) = \sqrt{x}$

6a Donner une expression de $f(x)$ pour $x \geq 1$

6b Montrer que f est lipschitzienne de rapport 1/2 sur $[1, +\infty[$

6c Justifier que f n'est pas lipschitzienne sur $]0, 1]$.

Partie 4 : On suppose dans cette partie que f est une solution du problème (P), que f est continue sur $]0, +\infty[$ et que f admet un prolongement par continuité en 0. On note $\lim_0 f = f(0)$, ce qui permet de définir une fonction f continue sur $[0, +\infty[$.

7 Montrer que f est bornée sur $[0, +\infty[$

Partie 5 : On pose, pour $x \in]0, +\infty[$, $g(x) = |\ln(x)|$.

8a Montrer que la fonction g est solution du problème (P)

8b Etudier la dérivabilité de g et calculer $g'(x)$ pour $x \neq 1$.

8c Etudier la dérivabilité à droite et à gauche de g en $x_0 = 1$. g est-elle dérivable en 1 ?

9 On suppose que f est une solution du problème (P) et que f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Montrer que C_f admet une tangente horizontale en $x = 1$.

10 On suppose que f est une solution du problème (P) mais on ne suppose pas que f est dérivable.

Montrer que f est dérivable à gauche en 1 si et seulement si f est dérivable à droite en 1 et comparer les réels $f'_g(1)$ et $f'_d(1)$ lorsque ces réels existent.

Corrigé de l'exercice 1 : Soient f et g des fonctions définies et continues sur $[0, 1]$, à valeurs réelles.

1 Ecrire avec des quantificateurs la propriété "les graphes de f et g se coupent".

$$\exists x \in [0, 1] / f(x) = g(x).$$

2 On suppose que $\sup_{x \in [0, 1]} f(x) = \sup_{x \in [0, 1]} g(x)$.

2a Justifier qu'il existe $a, b \in [0, 1]$ tels que $f(a) = g(b)$.

f et g sont continues sur le segment $[0, 1]$ donc d'après le théorème des bornes atteintes, elles sont bornées et atteignent leurs bornes. Donc il existe $a, b \in [0, 1]$ tels que $f(a) = \sup_{x \in [0, 1]} f(x)$

$$\text{et } g(b) = \sup_{x \in [0, 1]} g(x).$$

Puisque $\sup_{x \in [0, 1]} f(x) = \sup_{x \in [0, 1]} g(x)$, on a $f(a) = g(b)$.

2b En considérant $h = f - g$, montrer que les graphes de f et de g se coupent.

$f(a)$ et $g(b)$ sont respectivement les maximums de f et g donc on a de plus, $f(b) \leq f(a)$ et $g(a) \leq g(b)$.

Donc $h(a) = f(a) - g(a) \geq f(a) - g(b) = 0$, et $h(b) = f(b) - g(b) \leq f(a) - g(b) = 0$.

Donc h est continue et change de signe sur $[0, 1]$ donc d'après le TVI, il existe $c \in [0, 1]$ tel que $h(c) = 0$. Donc les graphes de f et g se coupent.

Corrigé de l'exercice 2 :

Partie A : on considère l'application $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto g(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

1 Dresser le tableau de variations de g en y faisant figurer les limites aux bornes de son domaine de définition.

g est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme quotient de fonctions dérivables et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, g'(x) = \frac{x \cdot 1/x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

d'où :

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq e$$

d'où :

x	0	e	$+\infty$
$g'(x)$	$\parallel$	$-$	$\parallel$
$g(x)$	$\parallel$	$-\infty \nearrow$	$1/e \searrow 0$

Il n'y a pas de forme indéterminée en 0. En $+\infty$, la limite est une croissante comparée.

2 Dans cette question, et seulement dans celle-ci, aucune justification n'est demandée. Donner, suivant la valeur du paramètre réel k , le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $g(x) = k$, et préciser la position des solutions éventuelles par rapport à 0, 1 et e (les résultats seront présentés avec clarté, éventuellement dans un tableau).

- Pour $k \leq 0$, il y a une unique solution et celle-ci est dans $]0, 1]$.
- Pour $0 < k < \frac{1}{e}$, il y a exactement deux solutions, l'une dans $]1, e[$ et l'autre dans $]e, +\infty[$.

- Pour $k = \frac{1}{e}$, il y a une unique solution qui est e .
- Pour $k > \frac{1}{e}$, il n'y a aucune solution.

Partie B : Soit k un réel strictement positif. On considère la suite réelle (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{kx}$.

1 Justifier que si (u_n) converge vers un réel L , alors $L > 0$ et $g(L) = k$.

On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$.

f étant continue (partout donc en L), on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(L)$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = L$ donc par

unicité de la limite, $f(L) = L$ donc $e^{kL} = L$ donc $L > 0$ et $kL = \ln(L)$ donc $g(L) = \frac{\ln(L)}{L} = k$.

2 Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

Remarquons que puisque $u_0 = 1$, on a $u_1 = e^{ku_0} = e^k > 1$ car $k > 0$. Donc $u_1 > u_0$.

De plus f est strictement croissante (évident en la dérivant car $k > 0$).

Alors, une récurrence immédiate (vous n'avez rien à perdre à la rédiger) montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.

Donc (u_n) est strictement croissante.

3 Dans cette question, on suppose $k \in \left]0, \frac{1}{e}\right]$.

3a Justifier que (u_n) converge vers un réel L et que l'on a $L \in]1, e]$.

On suppose $k \in \left]0, \frac{1}{e}\right]$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_n \leq e$.

- I.: $n = 0$. $u_0 = 1 \leq e$.
- H.: Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $u_n \leq e$. Alors $ku_n \leq ke \leq 1$ donc $e^{ku_n} \leq e^1 = e$.
- C.: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq e$.

Ainsi, la suite (u_n) est majorée par e et croissante donc d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) est convergente de limite $L \leq e$.

De plus, $L = f(L) = e^{kL} > 1$ car $kL > 0$. Donc $L \in]1, e]$.

3b Quelle est la valeur de L lorsque $k = \frac{1}{e}$?

Lorsque $k = \frac{1}{e}$, on a d'après B1, $g(L) = \frac{1}{e}$ donc d'après A2, $L = e$.

4 Déterminer la limite de (u_n) lorsque $k > \frac{1}{e}$.

Lorsque $k > \frac{1}{e}$, la suite (u_n) ne peut être convergente car sa limite L serait solution de $g(L) = k$, impossible d'après A2.

Or (u_n) est croissante donc d'après le théorème de la limite monotone, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Problème : fonctions lipschitziennes et équation fonctionnelle. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et k un réel.

On dit que f est k -lipschitzienne sur I si on a :

$$\forall x, x' \in I, |f(x) - f(x')| \leq k |x - x'|$$

Partie 1 : Soit une fonction $h :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

1 Soit $c > 0$. On note $I_1 =]0, c]$, $I_2 = [c, +\infty[$.

Montrer que si h est $K1$ -lipschitzienne sur l'intervalle I_1 et que h est $K2$ -lipschitzienne sur l'intervalle I_2 , alors h est K -lipschitzienne sur l'intervalle $]0, +\infty[$ pour une valeur de K que l'on précisera.

Soient $x, x' \in]0, +\infty[$ avec par exemple, $x \leq x'$. Posons $K = \max \{K1, K2\}$ et montrons que h est k lipschitzienne.

1er cas: $x, x' \in I_1$. Alors comme h est $K1$ -lipschitzienne sur l'intervalle I_1 , on a:

$$|h(x) - h(x')| \leq K1 |x - x'| \leq K |x - x'|$$

2ème cas: $x, x' \in I_2$. Alors comme h est $K2$ -lipschitzienne sur l'intervalle I_2 , on a:

$$|h(x) - h(x')| \leq K2 |x - x'| \leq K |x - x'|$$

3ème cas: $x \in I_1$ et $x' \in I_2$. Alors:

$$\begin{aligned} |h(x) - h(x')| &= |h(x) - h(c) + h(c) - h(x')| \leq |h(x) - h(c)| + |h(c) - h(x')| \\ &\leq K1 |x - c| + K2 |x' - c| \\ &\leq K |x - c| + K |x' - c| = K (c - x + x' - c) = K (x' - x) = K |x - x'| \end{aligned}$$

4ème cas: $x \in I_2$ et $x \in I_1$: échanger x et x' dans le cas précédent.

Conclusion: h est K -lipschitzienne sur l'intervalle I avec $K = \max \{K1, K2\}$

Dans la suite du problème, on s'intéresse aux fonctions $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ et vérifiant:

$$\forall x \in]0, +\infty[, f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$$

Une telle fonction est dite solution du problème (P)

Partie 2 : On suppose que f est une solution du problème (P) .

2 Justifier que f n'est pas injective.

On a par exemple $f(2) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ donc f n'est pas injective.

3a Montrer que si f est croissante alors f est constante.

Supposons f croissante.

Soit $x \in]0, +\infty[$, si $x \leq 1$, on a $f(x) \leq f(1) \leq f\left(\frac{1}{x}\right)$. Or $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ donc $f(x) = f(1) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

De même si $x \geq 1$, alors $f(x) \geq f(1) \geq f\left(\frac{1}{x}\right)$. Or $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ donc $f(x) = f(1) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Dans tous les cas, $f(x) = f(1)$ donc f est constante.

3b Montrer que si f est croissante sur $]0, 1]$ alors f est décroissante sur $[1, +\infty[$.

Supposons f croissante sur $]0, 1]$.

Soient $x, x' \in [1, +\infty[$, tels que $x \leq x'$. Alors $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{x'}$ et $\frac{1}{x}, \frac{1}{x'} \in]0, 1]$ donc $f\left(\frac{1}{x}\right) \geq f\left(\frac{1}{x'}\right)$

donc compte tenu de (P), $f(x) \geq f(x')$.

Donc f est décroissante sur $[1, +\infty[$.

4 Montrer que f admet une limite en 0 si et seulement si f admet une limite en $+\infty$.

Il suffit pour cette question d'appliquer dans chaque sens (implication directe ET indirecte)

le théorème de composition des limites avec la fonction f et la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, soit quand x tend vers 0, soit quand x tend vers $+\infty$.

Partie 3 : On suppose que f est une solution du problème (P).

5 On suppose dans cette question que f est lipschitzienne sur $]0, 1]$.

5a Montrer que f est lipschitzienne sur $[1, +\infty[$.

Soient $x, x' \in [1, +\infty[$, on a:

$$|f(x) - f(x')| = \left| f\left(\frac{1}{x}\right) - f\left(\frac{1}{x'}\right) \right| \leq K \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x'} \right| = K \left| \frac{x' - x}{xx'} \right| \leq K |x' - x|$$

car $xx' \geq 1$ donc $\frac{1}{|xx'|} \leq 1$.

Donc f est lipschitzienne de rapport K sur $[1, +\infty[$

5b Que peut on en déduire?

D'après la première partie, f est alors K -lipschitzienne sur $]0, +\infty[$

6 On suppose que $\forall x \in]0, 1]$, $f(x) = \sqrt{x}$

6a Donner une expression de $f(x)$ pour $x \geq 1$.

Pour $x \geq 1$, on a donc: $f(x) = f\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right) = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

6b Montrer que f est lipschitzienne de rapport 1/2 sur $[1, +\infty[$.

Soient $x, x' \in [1, +\infty[$, on a :

$$|f(x) - f(x')| = \left| \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x'}} \right| = \left| \frac{\sqrt{x'} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x'}} \right| \leq \left| \sqrt{x'} - \sqrt{x} \right|$$

car $\frac{1}{|\sqrt{x}\sqrt{x'}|} \leq 1$ donc :

$$|f(x) - f(x')| \leq \left| \frac{(\sqrt{x'} - \sqrt{x})(\sqrt{x'} + \sqrt{x})}{\sqrt{x'} + \sqrt{x}} \right| = \left| \frac{x' - x}{\sqrt{x'} + \sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{2} |x' - x|$$

car $\sqrt{x'} + \sqrt{x} \geq 2$.

Conclusion: f est lipschitzienne de rapport $1/2$ sur $[1, +\infty[$.

6c Justifier que f n'est pas lipschitzienne sur $]0, 1]$.

Supposons f lipschitzienne sur $]0, 1]$, de rapport $k \in \mathbb{R}$.

Alors on a en particulier pour tout $x, x' \in]0, 1]$, $|f(x') - f(x)| \leq k |x' - x|$ donc

$$|\sqrt{x'} - \sqrt{x}| \leq k |x' - x|$$

i.e., $\left| \frac{(\sqrt{x'} - \sqrt{x})(\sqrt{x'} + \sqrt{x})}{\sqrt{x'} + \sqrt{x}} \right| \leq k |x' - x|$ donc $\left| \frac{x' - x}{\sqrt{x'} + \sqrt{x}} \right| \leq k |x' - x|$ donc pour $x \neq x'$, $\left| \frac{1}{\sqrt{x'} + \sqrt{x}} \right| \leq k$ donc $\sqrt{x'} + \sqrt{x} \geq \frac{1}{k}$, ce qui est contredit dès que x et x' sont suffisamment proches de 0 car $\frac{1}{3k} > 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$ donc il existe $\alpha > 0$ tel que $x \leq \alpha \Rightarrow \sqrt{x} \leq \frac{1}{3k}$ donc $x = \alpha$ et $x' = \frac{\alpha}{2}$ donnent une contradiction.

Donc, f n'est pas lipschitzienne sur $]0, 1]$.

Partie 4 : On suppose dans cette partie que f est une solution du problème (P) , que f est continue sur $]0, +\infty[$ et que f admet un prolongement par continuité en 0. On note $\lim_0 f = f(0)$, ce qui permet de définir une fonction f continue sur $[0, +\infty[$.

7 Montrer que f est bornée sur $[0, +\infty[$.

La restriction de f à $[0; 1]$ est une fonction continue sur un segment donc bornée.

Il existe donc $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [0; 1], |f(x)| \leq M$.

On a alors pour tout $x \in [1, +\infty[$, $|f(x)| = \left| f\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq M$ car $\frac{1}{x} \in [0, 1]$.

Donc f est bornée sur $[0, +\infty[$.

Partie 5 : On pose, pour $x \in]0, +\infty[$, $g(x) = |\ln(x)|$.

8a Montrer que la fonction g est solution du problème (P) .

$\forall x \in]0, +\infty[$, $g\left(\frac{1}{x}\right) = \left| \ln\left(\frac{1}{x}\right) \right| = |-\ln(x)| = |\ln(x)| = g(x)$ donc la fonction g est solution du problème (P)

8b Etudier la dérivabilité de g et calculer $g'(x)$ lorsque g est dérivable en x .

Pour $x \in]0, 1[$, $g(x) = -\ln(x)$ au voisinage de x donc est dérivable en x avec $g'(x) = -\frac{1}{x}$.

Pour $x \in]1, +\infty[$, $g(x) = \ln(x)$ au voisinage de x donc est dérivable en x avec $g'(x) = \frac{1}{x}$.

8c Etudier la dérivabilité à droite et à gauche de g en $x_0 = 1$.

Pour $x > x_0 = 1$, on a $\frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \frac{\ln(x)}{x - 1}$ donc (limite fondamentale), $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = 1$ donc g est dérivable à droite en 1 avec $g'_d(1) = 1$.

Pour $x < x_0 = 1$, on a $\frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \frac{-\ln(x)}{x - 1}$ donc, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = -1$ donc g est dérivable à gauche en 1 avec $g'_g(1) = -1$.

9 On suppose que f est une solution du problème (P) et que f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Montrer que C_f admet une tangente horizontale en $x = 1$.

On a $\forall x \in]0, +\infty[, f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ donc en dérivant, il vient:

$$\frac{-1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) = f'(x)$$

En prenant $x = 1$ dans cette relation, on obtient: $-f'(1) = f'(1)$ donc $f'(1) = 0$.

Donc C_f admet une tangente horizontale en $x = 1$.

10 On suppose que f est une solution du problème (P) mais on ne suppose que f est dérivable. Montrer que f est dérivable à gauche en 1 si et seulement si f est dérivable à droite en 1 et comparer les réels $f'_g(1)$ et $f'_d(1)$ lorsque ces réels existent.

Comparons les taux d'accroissements de f en 1 à droite et à gauche::

Notons le premier $T_d(x)$ et le second $T_g(x)$.

$$\text{On a pour } x > 1, T_d(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) - f(1)}{x - 1} = (-x) \times \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) - f(1)}{\frac{1}{x} - 1} = -x T_g\left(\frac{1}{x}\right)$$

d'où l'on déduit facilement que l'un a une limite finie si et seulement si l'autre a une limite finie et que ces limites sont alors opposées.

Ainsi, f est dérivable à gauche en 1 si et seulement si f est dérivable à droite en 1 et lorsque ces réels existent, on a $f'_g(1) = -f'_d(1)$.