

D.S.5 24 Janvier 2026

Exercice 1 : On considère dans cet exercice la fonction F définie sur $\mathbb{R}^*$ par $F(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

- 1 Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- 2 Montrer que F est prolongeable par continuité en 0. On notera encore F ce prolongement.
- 3 Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser les valeurs de $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- 4 Montrer que les réels strictement positifs tels que $F(x) = 0$ constituent une suite $(a_k)_{k \geq 1}$ strictement croissante. On donnera explicitement la valeur de a_k .
- 5 Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer sans calculs qu'il existe un réel $x_k \in]a_k, a_{k+1}[$ tel que $F'(x_k) = 0$.
- 6 Montrer que la fonction F' est de même signe que $h : x \mapsto x \cos(x) - \sin(x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- 7 Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction h est strictement monotone sur $[a_k, a_{k+1}]$.
- 8 En déduire l'unicité de réel x_k défini dans la question 4a.
- 9 Etablir que $x_k \in \left] a_k, a_k + \frac{\pi}{2} \right[$.
- 10 Calculer $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k$ puis déterminer un équivalent simple de x_k .
- 11 Exprimer x_k à l'aide de $k\pi$ et $\arctan(x_k)$.
- 12 En déduire la limite de $x_k - k\pi$.

Exercice 2 : Soit $n \geq 3$ un entier et P_n le polynôme défini par :

$$P_n(X) = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$$

- 1 Montrer que P_n est divisible par $(X-1)^2$.
- 2 Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Rappeler, en la justifiant, la factorisation de $X^n - 1$ par $X - 1$ (on ne demande pas la décomposition de $X^n - 1$ en produit de facteurs irréductibles, mais seulement de factoriser par $X - 1$).
- 3 Déterminer la factorisation de $P_n(X)$ au moyen de $X - 1$ et d'un polynôme $Q(X)$.
- 4 Factoriser à son tour le polynôme $Q(X)$ par $X - 1$ en faisant apparaître des polynômes du type $X^p - 1$.
- 5 On a ainsi une factorisation de Q sous la forme $Q(X) = (X-1)Q_1(X)$ où Q_1 est évidemment de degré $n-1$. Vous avez en principe trouvé une expression de Q_1 à la question précédente. On demande ici d'explicitier les coefficients a_i tels que $Q_1 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$.

Problème 1 : On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$.

Partie 1 : étude de la bijection réciproque de f

1 Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} la bijection réciproque.

2 Donner sur le même graphique l'allure des courbes représentatives de f et f^{-1} . On donnera l'équation des tangentes à la courbe de f en 0 et en $\frac{\pi}{4}$ et on les fera apparaître sur le schéma.

3 Justifier que pour tout $x \in J$,
$$\begin{cases} \cos(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x} \\ \sin(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \end{cases}.$$

4 Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{1\}$ et montrer que :

$$\forall x \in J \setminus \{1\}, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

5 En déduire le développement limité de f^{-1} en $\sqrt{2}$ à l'ordre 1.

Partie 2 : étude des dérivées successives de f

6 Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I . Calculer f' et f'' .

7 Montrer que pour tout entier naturel non nul n , il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}.$$

8 Dédurre P_3 de la relation que vous avez obtenu dans la question précédente (donc sans calculer $f^{(3)}$).

9 On pose $Q_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_{n+1} = (1 - X^2)Q'_n + (n+1)XQ_n$.

9a Calculer $Q_n(1)$ en fonction de n .

9b Déterminer pour tout entier n , le degré et le coefficient dominant du polynôme Q_n .

Exercice 4 : On considère la fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) \end{cases}.$$

On note Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal du plan.

1a Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

1b Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, déterminer $g(x)$ tel que $f'(x) = 2xg(x)$.

1c Montrer que la fonction g ainsi définie est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, que sa dérivée vérifie $g'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{(1+(1+x))^2} P(x)$ où $x \mapsto P(x)$ est une fonction polynomiale du second degré et qu'elle vérifie aussi :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, g'(x) < 0.$$

1d Etudier le signe de g sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$.

1e En déduire le tableau de variations de f sur ces intervalles.

2a Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2b Déterminer les réels l_G et l_D , limites respectives de f en $(-1)^-$ et $(-1)^+$.

3 On considère les fonctions :

$$f_G : \begin{cases}]-\infty, -1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x < -1 \\ l_G & \text{si } x = -1 \end{cases} \end{cases} \quad \text{et} \quad f_D : \begin{cases} [-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x > -1 \\ l_D & \text{si } x = -1 \end{cases} \end{cases}.$$

3a Déterminer le DL à l'ordre 2 de f_D en -1 .

3b Justifier que f_D est dérivable en -1 et donner $f'_D(-1)$.

Préciser en suite la position de Γ par rapport à sa demi-tangente à droite au point d'abscisse -1 .

3c Déterminer le DL à l'ordre 2 de f_G en -1 .

Préciser alors l'allure de Γ au voisinage à gauche du point d'abscisse -1 .

4a Déterminer le DL à l'ordre 3 de $y \mapsto \frac{y}{1+y}$ en 0, puis le DL à l'ordre 3 de $y \mapsto \arctan\left(\frac{y}{1+y}\right)$ en 0.

4b En remarquant que pour tout $X \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, $\arctan\left(\frac{1}{1+1/X}\right) = \arctan\left(\frac{X}{1+X}\right)$, donner un développement asymptotique de $f(x)$ à la précision $\frac{1}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4c Que peut-on en déduire ?

Corrigé de l'exercice 1 : On considère dans cet exercice la fonction F définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $F(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

1 Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^*$.

F est continue comme quotient de deux fonctions continues.

2 Montrer que F est prolongeable par continuité en 0. On notera encore F ce prolongement.

Par limite fondamentale, $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 1$ donc F est prolongeable par continuité en 0 en posant $F(0) = 1$.

3 Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser les valeurs de $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$F'(x) = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$$

Donc :

$$F'(x) = \frac{x(1 + o_0(x)) - x + o_0(x^2)}{x^2} = \frac{o_0(x^2)}{x^2} = o_0(1)$$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} F'(x) = 0$.

Sachant de plus que F est continue sur $\mathbb{R}^*$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, le théorème de la limite de la dérivée montre que F est dérivable en 0 avec $F'(0) = 0$ et donc aussi que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

4 Montrer que les réels strictement positifs tels que $F(x) = 0$ constituent une suite $(a_k)_{k \geq 1}$ strictement croissante. On donnera explicitement la valeur de a_k .

On a $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = k\pi$ donc $(a_k)_{k \geq 1}$ est clairement une suite strictement croissante.

5 Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer sans calculs qu'il existe un réel $x_k \in]a_k, a_{k+1}[$ tel que $F'(x_k) = 0$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $F(a_k) = F(a_{k+1}) = 0$, F est continue sur $[a_k, a_{k+1}]$ et dérivable sur $]a_k, a_{k+1}[$ donc d'après le théorème de Rolle, il existe $x_k \in]a_k, a_{k+1}[$ tel que $F'(x_k) = 0$.

6 Montrer que la fonction F' est de même signe que $h : x \mapsto x \cos(x) - \sin(x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On a montré précédemment que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $F'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$ donc F' est du même signe que h .

7 Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction h est strictement monotone sur $[a_k, a_{k+1}]$.

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$h'(x) = -x \sin(x) + \cos(x) - \cos(x) = -x \sin(x)$$

Sur un intervalle de la forme $[a_k, a_{k+1}] = [k\pi, (k+1)\pi]$, la fonction $\sin$ est de signe constant. Donc h' est de signe constant sur $[a_k, a_{k+1}]$, donc h est strictement monotone sur cet intervalle.

8 En déduire l'unicité de réel x_k défini dans la question 4a.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction h est strictement monotone sur l'intervalle $[a_k, a_{k+1}]$, donc elle y est injective donc s'annule au plus une fois sur cet intervalle, ce qui montre l'unicité du réel x_k de la question 4a.

9 Etablir que $x_k \in \left] a_k, a_k + \frac{\pi}{2} \right[$.

Montrons que $F'(a_k)$ et $F'\left(a_k + \frac{\pi}{2}\right)$ sont de signes opposés. Pour cela, il suffit de montrer que $h(a_k)$ et $h\left(a_k + \frac{\pi}{2}\right)$ le sont. On a :

$$h(a_k) = a_k \cos(a_k) - \sin(a_k) = (-1)^k a_k$$

et

$$\begin{aligned} h\left(a_k + \frac{\pi}{2}\right) &= \left(a_k + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(a_k + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(a_k + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\left(a_k + \frac{\pi}{2}\right) \sin(a_k) - \cos(a_k) = -\cos(a_k) = (-1)^{k+1} \end{aligned}$$

donc $h(a_k)$ et $h\left(a_k + \frac{\pi}{2}\right)$ sont de signes contraires.

Ainsi F' est continue sur $\left[a_k, a_k + \frac{\pi}{2}\right]$ et change de signe donc d'après le TVI, F' s'annule dans $\left] a_k, a_k + \frac{\pi}{2} \right[$ (intervalle ouvert car $F'(a_k)$ et $F'\left(a_k + \frac{\pi}{2}\right)$ sont non nuls).

Par unicité de x_k dans $[a_k, a_{k+1}] \supset \left[a_k, a_k + \frac{\pi}{2}\right]$, on a $x_k \in \left] a_k, a_k + \frac{\pi}{2} \right[$.

10 Calculer $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k$ puis déterminer un équivalent simple de x_k .

On a $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = +\infty$ et $x_k \geq a_k$ donc par minoration, $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = +\infty$.

De plus, $k\pi \leq x_k \leq (k+1)\pi$ donc $1 \leq \frac{x_k}{k\pi} \leq 1 + \frac{1}{k}$ donc par théorème d'encadrement,

$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_k}{k\pi} = 1$ donc $x_k \sim_{+\infty} k\pi$.

11 Exprimer x_k à l'aide de $k\pi$ et $\arctan(x_k)$.

On a $F'(x_k) = 0 \Leftrightarrow \tan(x_k) = x_k$.

On a donc $\tan(x_k - k\pi) = x_k$, or $x_k - k\pi \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ donc $\arctan(x_k) = x_k - k\pi$.

Ainsi :

$$x_k = k\pi + \arctan(x_k)$$

12 En déduire la limite de $x_k - k\pi$.

On a $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = +\infty$ donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} \arctan(x_k) = \frac{\pi}{2}$ donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} (x_k - k\pi) = \frac{\pi}{2}$.

Corrigé de l'exercice 2 : Soit $n \geq 3$ un entier et P_n le polynôme défini par :

$$P_n(X) = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$$

1 Montrer que P_n est divisible par $(X-1)^2$.

On a $P'_n(X) = n(n+1)X^n - n(n+1)X^{n-1}$ donc $P'_n(1) = 0$, or aussi, $P_n(1) = n - n - 1 + 1 = 0$ donc 1 est racine au moins double de P_n donc $(X-1)^2$ divise P_n .

2 Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Rappeler, en la justifiant, la factorisation de $X^n - 1$ par $X - 1$ (on ne demande pas la décomposition de $X^n - 1$ en produit de facteurs irréductibles, mais seulement de factoriser par $X - 1$).

On a $X^n - 1 = (X-1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1)$ car en développant, tous les termes se télescopent sauf X^n et -1 .

3 Déterminer la factorisation de $P_n(X)$ au moyen de $X - 1$ et d'un polynôme $Q(X)$.

On a

$$\begin{aligned} P_n(X) &= nX^n(X-1) - X^n + 1 \\ &= (X-1)nX^n - (X-1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1) \\ &= (X-1)(nX^n - X^{n-1} - X^{n-2} - \dots - X - 1) \end{aligned}$$

4 Factoriser à son tour le polynôme $Q(X)$ par $X - 1$ en faisant apparaître des polynômes du type $X^p - 1$.

$$\text{On a donc } Q(X) = nX^n - X^{n-1} - X^{n-2} - \dots - X - 1 = \sum_{k=0}^{n-1} (X^n - X^k) = \sum_{k=0}^{n-1} X^k (X^{n-k} - 1)$$

donc

$$Q(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(X^k (X-1) \sum_{j=0}^{n-k-1} X^j \right) = (X-1) \sum_{k=0}^{n-1} \left(X^k \sum_{j=0}^{n-k-1} X^j \right)$$

5 On a ainsi une factorisation de Q sous la forme $Q(X) = (X-1)Q_1(X)$ où Q_1 est évidemment de degré $n-1$. Vous avez en principe trouvé une expression de Q_1 à la question précédente. On demande ici d'explicitier les coefficients a_i tels que $Q_1 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$.

On a donc

$$\begin{aligned} Q_1(X) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(X^k \sum_{j=0}^{n-k-1} X^j \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-k-1} X^{k+j} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=k}^{n-1} X^i \text{ (avec } i = k + j) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^i X^i = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) X^i. \text{ (somme triangulaire)} \end{aligned}$$

Corrigé du problème 1 : On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$.

Partie 1 : étude de la bijection réciproque de f

1 Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} la bijection réciproque.

f est définie et dérivable sur I comme inverse d'une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur I et on a pour tout $x \in I$:

$$f'(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} \geq 0$$

et ne s'annulant que pour $x = 0$.

Donc f est strictement croissante sur I et continue donc d'après le théorème de la bijection, f induit une bijection de I sur $J = f(I) = \left[f(0), f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = [1, \sqrt{2}]$.

2 Donner sur le même graphique l'allure des courbes représentatives de f et f^{-1} . On donnera l'équation des tangentes à la courbe de f en 0 et en $\frac{\pi}{4}$ et on les fera apparaître sur le schéma.

On a $f'(0) = 0$ et $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ d'où les équations des tangentes à la courbe en ces points :

$$\begin{aligned} T_0 &: y = 1 \\ T_{\pi/4} &: y = \sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \end{aligned}$$

3 Justifier que pour tout $x \in J$, $\begin{cases} \cos(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x} \\ \sin(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \end{cases}$.

On a pour tout $x \in J$, $f(f^{-1}(x)) = x$ donc $x = \frac{1}{\cos(f^{-1}(x))}$ donc $\cos(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x}$.

Or puisque $\sin^2(f^{-1}(x)) + \cos^2(f^{-1}(x)) = 1$, on en déduit $\sin^2(f^{-1}(x)) = 1 - \frac{1}{x^2}$. Enfin, $f^{-1}(x) \in I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ donc $\sin(f^{-1}(x)) \geq 0$ donc :

$$\sin(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$$

4 Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{1\}$ et montrer que :

$$\forall x \in J \setminus \{1\}, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

f est une bijection dérivable strictement monotone de $I \setminus \{0\}$ sur $J \setminus \{1\}$ et $\forall x \in I \setminus \{0\}$, $f'(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} \neq 0$ donc d'après le théorème de la dérivée de la réciproque, f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{1\}$ et pour tout $x \in J \setminus \{1\}$:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\frac{\sin(f^{-1}(x))}{\cos^2(f^{-1}(x))}} = \frac{1/x^2}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

5 En déduire le développement limité de f^{-1} en $\sqrt{2}$ à l'ordre 1.

On a $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ donc $f^{-1}(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$ et de plus $(f^{-1})'(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2-1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 1 en $\sqrt{2}$ qui s'écrit :

$$f^{-1}(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \sqrt{2}) + o_{x \rightarrow \sqrt{2}}(x - \sqrt{2}).$$

Partie 2 : étude des dérivées successives de f

6 Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I . Calculer f' et f'' .

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I comme inverse d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ ne s'annulant pas et pour tout $x \in I$, $f'(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$ donc :

$$f''(x) = \frac{\cos^3(x) + 2\cos(x)\sin^2(x)}{\cos^4(x)} = \frac{\cos^2(x) + 2\sin^2(x)}{\cos^3(x)} = \frac{1 + \sin^2(x)}{\cos^3(x)}$$

7 Montrer que pour tout entier naturel non nul n , il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in I, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}.$$

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ qu'il existe un polynôme P_n tel que $\forall x \in I, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}$.

- I. : $n = 1$. Posons $P_1 = X$, on a bien $\forall x \in I, f'(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{P_1(\sin(x))}{\cos^{1+1}(x)}$.
- H. : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons qu'il existe P_n , polynôme tel que $\forall x \in I, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}$. Alors en dérivant, on a pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{\cos(x) P'_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)} - (n+1) \frac{-\sin(x) P_n(\sin(x))}{\cos^{n+2}(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x) P'_n(\sin(x)) + (n+1) \sin(x) P_n(\sin(x))}{\cos^{n+2}(x)} \\ &= \frac{(1 - \sin^2(x)) P'_n(\sin(x)) + (n+1) \sin(x) P_n(\sin(x))}{\cos^{n+2}(x)} \\ &= \frac{P_{n+1}(\sin(x))}{\cos^{n+2}(x)} \end{aligned}$$

en posant $P_{n+1}(X) = (1 - X^2) P'_n(X) + (n+1) X P_n(X)$, ce qui fait bien de P_{n+1} un polynôme.

- C. : Ok !

8 Dédurre P_3 de la relation que vous avez obtenu dans la question précédente (donc sans calculer $f^{(3)}$).
On a $P_2 = 1 + X^2$ (d'après 6) donc on calcule :

$$\begin{aligned} P_3 &= (1 - X^2) 2X + 3X (1 + X^2) = 2X - 2X^3 + 3X + 3X^3 \\ &= X^3 + 5X \end{aligned}$$

9 On pose $Q_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_{n+1} = (1 - X^2) Q'_n + (n+1) X Q_n$.

9a Calculer $Q_n(1)$ en fonction de n .

De la relation définissant Q_{n+1} , on déduit : $Q_{n+1}(1) = (n+1) Q_n(1)$. De plus, $Q_0(1) = 1$. Il vient donc $Q_n(1) = n!$.

9b Déterminer pour tout entier n , le degré et le coefficient dominant du polynôme Q_n .

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\deg(Q_n) = n$ et $c(Q_n) = 1$:

- I. : $n = 0$. On a $Q_0 = 1$ donc $\deg(Q_0) = 0$ et $c(Q_0) = 1$.

- H. : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $\deg(Q_n) = n$ et $c(Q_n) = 1$. Alors on peut écrire $Q_n = X^n + S_n$ avec S_n un polynôme de degré au plus $n - 1$.
Ainsi :

$$\begin{aligned} Q_{n+1} &= (1 - X^2) (nX^{n-1} + S'_n) + (n+1) X (X^n + S_n) \\ &= nX^{n-1} + S'_n - X^2 S'_n + (n+1) X S_n + X^{n+1} \end{aligned}$$

Or $\deg(nX^{n-1} + S'_n - X^2 S'_n + (n+1) X S_n) \leq n$ comme somme de polynômes de degrés tous au plus n .

Donc $\deg(Q_{n+1}) = n+1$ et $c(Q_{n+1}) = 1$.

- C.: Ok!

Corrigé de l'exercice 4 : On considère la fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) \end{cases}.$$

On note Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal du plan.

1a Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$\arctan$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ comme composée et produit de fonctions qui le sont).

1b Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, déterminer $g(x)$ tel que $f'(x) = 2xg(x)$.

Et on a pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) - \frac{x^2}{(1+x)^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{(1+x)^2}} \\ &= 2x \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) - \frac{x^2}{1 + (1+x)^2} = 2xg(x) \end{aligned}$$

en posant $g(x) = \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) - \frac{x}{2(1+(1+x)^2)}$. Solution: $\frac{x}{(2(x+1)^2+2)^2} (4x+4) - \frac{1}{2(x+1)^2+2} - \frac{1}{\left(\frac{1}{(x+1)^2}+1\right)(x+1)^2} : -\frac{1}{2(x^2+2x+2)^2} (x^2+4x+6)$

1c Montrer que la fonction g ainsi définie est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, que sa dérivée vérifie $g'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{(1+(1+x)^2)^2} P(x)$ où $x \mapsto P(x)$ est une fonction polynomiale du second degré et qu'elle vérifie aussi :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, g'(x) < 0.$$

g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ comme somme, quotient et composée de fonctions qui le sont et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{(1+x)^2}} - \frac{2(1+(1+x)^2) - 4x(1+x)}{4(1+(1+x)^2)^2} \\ &= \frac{-1}{1+(1+x)^2} - \frac{2+2x+x^2-2x-2x^2}{2(1+(1+x)^2)^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{(1+(1+x)^2)^2} (x^2 - 2 - 2(1+(1+x)^2)) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{(1+(1+x)^2)^2} P(x) \end{aligned}$$

en posant $P(x) = x^2 - 2 - 2(1+(1+x)^2) = x^2 - 2 - 2(2+2x+x^2) = -x^2 - 4x - 6$.

Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 16 - 24 = -8 < 0$ donc est toujours négatif sur $\mathbb{R}$ donc $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, g'(x) < 0$.

1d Etudier le signe de g sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$.

Donc g est décroissante (strictement) sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$.

Or, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ car $\frac{x}{2(1+(1+x)^2)} \sim_{\pm\infty} \frac{1}{2x}$ donc g est négative sur $]-\infty, -1[$ et positive sur $]-1, +\infty[$.

1e En déduire le tableau de variations de f sur ces intervalles.

D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	+
$f(x)$	$-\infty \nearrow^{-\pi/2}$		$\pi/2 \searrow$	$0 \nearrow^{+\infty}$

2a Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

On a $\arctan(X) \sim_0 X$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ donc par substitution, $\arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) \sim_{\pm\infty} \frac{1}{x+1} \sim_{\pm\infty} \frac{1}{x}$ donc $f(x) \sim_{\pm\infty} x$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2b Déterminer les réels l_G et l_D , limites respectives de f en $(-1)^-$ et $(-1)^+$.

On a $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x+1} = -\infty$ donc par composition de limites, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\frac{\pi}{2} = l_G$. De même, on trouve $l_D = \frac{\pi}{2}$.

3 On considère les fonctions :

$$f_G : \begin{cases}]-\infty, -1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x < -1 \\ l_G & \text{si } x = -1 \end{cases} \end{cases} \quad \text{et} \quad f_D : \begin{cases} [-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x > -1 \\ l_D & \text{si } x = -1 \end{cases} \end{cases}.$$

3a Montrer que pour $h \in \mathbb{R}^+$, $f_D(-1+h) = (1-2h+h^2) \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(h) \right)$.

Donner alors le DL à l'ordre 2 de f_D en -1 .

Pour $h \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$\begin{aligned} f_D(-1+h) &= (-1+h)^2 \arctan\left(\frac{1}{h}\right) \\ &= (1-2h+h^2) \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(h) \right) \\ &= (1-2h+h^2) \left(\frac{\pi}{2} - h + \frac{h^3}{3} + o_0(h^3) \right) \\ &= \frac{\pi}{2} - h - \pi h + 2h^2 + \frac{\pi}{2}h^2 + o_0(h^2) \\ &= \frac{\pi}{2} - (\pi+1)h + \left(\frac{\pi}{2} + 2 \right) h^2 + o_0(h^2) \end{aligned}$$

Donc

$$f_D(x) = \frac{\pi}{2} - (\pi+1)(x+1) + \left(\frac{\pi}{2} + 2 \right) (x+1)^2 + o_{-1}((x+1)^2)$$

3b Justifier que f_D est dérivable en -1 et donner $f'_D(-1)$.

Préciser en suite la position de Γ par rapport à sa demi-tangente à droite au point d'abscisse -1

f_D admet donc un DL à l'ordre 1 en -1 donc est dérivable en -1 et $f'_D(-1) = -(\pi+1)$.

Γ admet donc au point d'abscisse -1 une demi-tangente à droite T_D d'équation :

$$T_D : y = \frac{\pi}{2} - (\pi+1)(x+1)$$

De plus, $f_D(x) - \left(\frac{\pi}{2} - (\pi+1)(x+1) \right) \sim_{-1} \left(\frac{\pi}{2} + 2 \right) (x+1)^2 \geq 0$ donc à droite de ce point, Γ est au-dessus de sa demi-tangente T_D .

3c Déterminer le DL à l'ordre 2 de f_G en -1 .

Préciser alors l'allure de Γ au voisinage à gauche du point d'abscisse -1 .

Pour $h \in \mathbb{R}^{-*}$:

$$\begin{aligned} f_G(-1+h) &= (-1+h)^2 \arctan\left(\frac{1}{h}\right) \\ &= (1-2h+h^2) \left(-\frac{\pi}{2} - \arctan(h) \right) \\ &= (1-2h+h^2) \left(-\frac{\pi}{2} - h + \frac{h^3}{3} + o_0(h^3) \right) \\ &= -\frac{\pi}{2} - h + \pi h + 2h^2 - \frac{\pi}{2}h^2 + o_0(h^2) \\ &= -\frac{\pi}{2} + (\pi-1)h + \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) h^2 + o_0(h^2) \end{aligned}$$

Donc

$$f_G(x) = -\frac{\pi}{2} + (\pi-1)(x+1) + \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) (x+1)^2 + o_{-1}((x+1)^2)$$

f_D admet donc un DL à l'ordre 1 en -1 donc est dérivable en -1 et $f'_D(-1) = -(\pi+1)$.

Γ admet donc au point d'abscisse -1 une demi-tangente à droite T_G d'équation :

$$T_G : y = -\frac{\pi}{2} + (\pi-1)(x+1)$$

De plus, $f_G(x) - \left(-\frac{\pi}{2} + (\pi - 1)(x + 1)\right) \sim_{-1} \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)(x + 1)^2 \geq 0$ donc à gauche de ce point, Γ est au-dessus de sa demi-tangente T_G .

4a Déterminer le DL à l'ordre 3 de $y \mapsto \frac{y}{1+y}$ en 0, puis le DL à l'ordre 3 de $y \mapsto \arctan\left(\frac{y}{1+y}\right)$ en 0.

On a :

$$\frac{y}{1+y} = y(1 - y + y^2 + o_0(y^2)) = y - y^2 + y^3 + o_0(y^3)$$

Or $\arctan(X) = X - \frac{X^3}{3} + o_0(X^3)$ et $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{1+y} = 0$ donc par composition de DL :

$$\begin{aligned} \arctan\left(\frac{y}{1+y}\right) &= y - y^2 + y^3 + o_0(y^3) - \frac{(y - y^2 + y^3 + o_0(y^3))^3}{3} + o_0\left((y - y^2 + y^3 + o_0(y^3))^3\right) \\ &= y - y^2 + y^3 + o_0(y^3) - \frac{y^3}{3} + o_0(y^3) + o_0(y^3) \\ &= y - y^2 + \frac{2y^3}{3} + o_0(y^3) \end{aligned}$$

4b En remarquant que pour tout $X \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, $\arctan\left(\frac{1}{1+1/X}\right) = \arctan\left(\frac{X}{1+X}\right)$, donner un développement asymptotique de $f(x)$ à la précision $\frac{1}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Posons $X = \frac{1}{x}$, alors ;

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{X^2} \arctan\left(\frac{1}{1+1/X}\right) = \frac{1}{X^2} \arctan\left(\frac{X}{1+X}\right) \\ &= \frac{1}{X^2} \left(X - X^2 + \frac{2X^3}{3} + o_{X \rightarrow 0}(X^3)\right) = \frac{1}{X} - 1 + \frac{2}{3}X + o_{X \rightarrow 0}(X) \\ &= x - 1 + \frac{2}{3x} + o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

4c Que peut-on en déduire ?

Donc Γ admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote $\Delta : y = x - 1$ et $f(x) - (x - 1) \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3x} > 0$ donc Γ est au-dessus de son asymptote Δ au voisinage de $+\infty$.