

D.S.6 14 Mars 2026

Exercice 1 : Notons E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $D : f \mapsto D(f) = f'$.

1 Montrer que D est un endomorphisme de E .

2 Déterminer le noyau et l'image de D .

Partie 1 : Soient $f_1 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^t$, $f_2 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t/2} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$ et $f_3 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t/2} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$.

On note $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ et G le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{B}$.

3 Soient a, b, c des réels tels que $af_1 + bf_2 + cf_3$ soit la fonction nulle.

3a Montrer que la famille $\mathcal{B}$ est libre en prenant des valeurs particulières ou bien en passant à la limite.

3b Calculer le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $af_1 + bf_2 + cf_3$ au voisinage de 0 et montrer d'une autre manière que la famille $\mathcal{B}$ est libre. La famille $\mathcal{B}$ est donc une base de G .

4 Montrer que $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, $D(f_i) \in G$. En déduire que G est stable par D , c'est-à-dire que $\forall g \in G$, $D(g) \in G$. On notera $\widehat{D}$ l'endomorphisme de G induit par la restriction de D à G .

5a Donner la matrice de $\widehat{D}$ dans la base $\mathcal{B}$.

5b Déterminer $\widehat{D}^3$.

5c Justifier que $\widehat{D}$ est un automorphisme de G et exprimer $(\widehat{D})^{-1}$ en fonction de $\widehat{D}$.

Partie 2 : On cherche dans cette partie à résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E}) : y''' = y$.

Une solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$ est une fonction trois fois dérivable, vérifiant $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'''(t) = f(t)$.

On ne s'intéresse dans tout le problème qu'aux solutions à valeurs réelles.

6 Montrer que toute solution de $(\mathcal{E})$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

7 Montrer que la fonction nulle est la seule solution polynômiale de $(\mathcal{E})$.

Notons $T = D^3 - Id$ où Id est l'identité de E .

8 Montrer que $G \subset \ker(T)$.

Soit f une solution de $(\mathcal{E})$. Notons $g = f'' + f' + f$.

9 Montrer que g est solution de l'équation différentielle $y' = y$.

10a Résoudre rapidement l'équation différentielle $y' = y$.

10b Résoudre $y'' + y' + y = 0$, on donnera une base de l'ensemble des solutions à valeurs réelles.

11 Soit $A \in \mathbb{R}$. Décrivez l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + y' + y = Ae^t$.

12 En déduire que $\ker(T) \subset G$.

13 Déterminer les solutions de $(\mathcal{E})$.

Exercice 2 : Matrices stochastiques.

Soient m, n, p, q, r, s des entiers naturels non nuls.

$\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes et à coefficients réels et

$\mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à r lignes et s colonnes et à coefficients réels.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n et à coefficients réels.

Questions préliminaires :

1 Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})$.

1a A quelle condition sur p, q, r, s le produit AB est-il bien défini ? Quelle est alors la taille de la matrice AB ?

1b Cette condition étant supposée vérifiée, on note $c_{i,j}$ le terme général de la matrice AB . Exprimer $c_{i,j}$ en fonction des coefficients des matrices A et B .

2 Soit $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $a_{i,j}^{(p)}$ le terme général de la matrice A_p . Par définition, on dit que la suite de matrices (A_p) converge vers une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ si pour tous indices i, j , la suite réelle $\left(a_{i,j}^{(p)}\right)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers $a_{i,j}$.

2a Etant données des suites de réels (λ_p) et (μ_p) que l'on suppose convergentes de limites respectives λ et μ , montrer que si la suite de matrices (A_p) converge vers A et la suite de matrices (B_p) converge vers B , alors la suite $(\lambda_p A_p + \mu_p B_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers $\lambda A + \mu B$.

2b Montrer que sous les mêmes conditions, la suite $(A_p B_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers AB .

Soit $r \in \mathbb{N}$ tel que $r \geq 2$. Une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ est dite stochastique lorsqu'elle vérifie les deux conditions suivantes :

- (i) : pour tout $(i, j) \in [1, r]^2$, $a_{i,j} \in [0, 1]$,
- (ii) : pour tout $i \in [1, r]$, on a $\sum_{j=1}^r a_{i,j} = 1$.

On note $\mathcal{S}_r$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$.

Conformément à ce qui précède, on dira que la matrice A^n a une limite finie si tous les coefficients de A^n admettent une limite finie. Et la limite de A^n sera la matrice des limites des suites de coefficients de A^n .

Partie 1 :

3 Montrer que le produit de deux éléments de $\mathcal{S}_2$ est dans $\mathcal{S}_2$.

4 On pose $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ et on note I_2 la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4a Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $A^2 = aA + bI_2$.

4b Montrer qu'il existe deux suites de réels (a_n) et (b_n) telles que l'on ait :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{A^n}{2} = a_n A + b_n I_2$$

4c Vérifier que la suite $(a_n + b_n)$ est constante et donner sa valeur.

4d En déduire l'expression de a_n en fonction de n . Exprimer de même b_n en fonction de n .

4e En déduire l'expression de A^n en fonction de n , de A et de I_2 .

4f Montrer que A^n admet une limite que l'on déterminera quand n tend vers $+\infty$. Nous la noterons A^∞ . Donner l'expression de A^∞ en fonction de A et de I_2 et montrer que $A^\infty \in \mathcal{S}_2$.

Partie 2 : On pose $B = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, et $P = \begin{pmatrix} -9/8 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et on note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5a Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .

5b Déterminer une base de $\ker(B - 2I_3)$.

5c Déterminer une base de $\ker\left(B - \frac{7}{12}I_3\right)$.

5d Le calcul du produit PDP^{-1} donne $PDP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On ne cherchera pas à vérifier ce calcul.

Pour λ réel, on pose $D_\lambda = D + \lambda I_3$.

Montrer qu'il existe un unique réel λ tel que $PD_\lambda P^{-1}$ soit stochastique.

On notera $B_\lambda = PD_\lambda P^{-1}$.

5e Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_λ^n s'exprime simplement en fonction de D_λ^n .

5f On suppose que λ prend la valeur déterminée dans la question 5d.

Montrer que B_λ^n admet alors une limite que l'on déterminera quand n tend vers l'infini. Nous la noterons B^∞ . Montrer que B^∞ est stochastique.

Exercice 3 : On note E l'ensemble de suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} + u_n$$

Autrement dit :

$$E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} + u_n\}$$

On admet qu'étant donnés deux réels fixés α et β , il existe une et une seule suite $u \in E$ telle que $u_0 = \alpha$ et $u_1 = \beta$.

1 Montrer que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

2 Soit la suite $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E définie par $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$.

- 2a** Calculer les termes a_2, a_3 et a_4 . (pour vérification, $a_5 = 30$).
- 2b** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est un entier naturel.
- 2c** Etudier la monotonie de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ puis montrer qu'elle diverge vers $+\infty$.

3 Soit la suite $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E définie par $b_0 = 0$ et $b_1 = 1$.

3a Calculer les termes b_2, b_3 et b_4 . (pour vérification, $b_5 = 43$).

3b Etudier la convergence de la suite $b = (b_n)$.

4 On suppose que la suite $u = (u_n)$ est un élément de E .

4a Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha a_n + \beta b_n$.

4b Montrer que E est un plan vectoriel (on en précisera une base).

5 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = a_{n+1}b_n - a_nb_{n+1}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$w_n = (-1)^{n+1}.$$

6 Pour tout entier $n \geq 1$, on définit $f_n = \frac{a_n}{b_n}$.

6a Exprimer $f_{n+1} - f_n$ en fonction de w_n, b_n et b_{n+1} .

6b Montrer que les suites $(f_{2n})_{n \geq 1}$ et $(f_{2n-1})_{n \geq 1}$ sont adjacentes.

6c Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ est convergente. On notera L sa limite.

A l'aide des valeurs calculées au début de l'exercice, donner un encadrement le plus précis possible de L par des nombres rationnels explicites.

7a Justifier que pour tout entier $n \geq 1$: $0 < |f_n - L| \leq \frac{1}{b_n^2}$.

7b Montrer que L est un nombre irrationnel. On pourra raisonner par l'absurde.

8 On note $\mathcal{C}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formé des suites convergentes (on ne demande pas de démontrer que c'est bien un sev).

8a Montrer que si $v \in E \cap \mathcal{C}$, alors v converge vers 0.

8b Montrer que $E \cap \mathcal{C}$ est une droite vectorielle.

8c Les sous-espaces E et $\mathcal{C}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

8d Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq a_n \leq n!$ et $0 \leq b_n \leq n!$.

8e A-t-on $E + \mathcal{C} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

Corrigé de l'exercice 1 : Notons E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $D : f \mapsto D(f) = f'$.

1 Montrer que D est un endomorphisme de E .

Soient $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$D(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g' = \lambda D(f) + \mu D(g)$$

donc D est linéaire. De plus, clairement, $D(f) \in E$. Donc D est un endomorphisme de E .

2 Déterminer le noyau et l'image de D .

Clairement, $\ker(D)$ est l'ensemble des fonctions constantes. Et si $f \in E$, f est continue donc admet une primitive F qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ car elle est dérivable et que sa dérivée f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Donc $f \in \text{Im}(D)$.

Donc $\text{Im}(D) = E$.

Partie 1 : Soient $f_1 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^t$, $f_2 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t/2} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$ et $f_3 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t/2} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$.

On note $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ et G le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{B}$.

3 Soient a, b, c des réels tels que $af_1 + bf_2 + cf_3$ soit la fonction nulle.

3a Montrer que la famille $\mathcal{B}$ est libre en prenant des valeurs particulières ou bien en passant à la limite.

On a donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $ae^t + be^{-t/2} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + ce^{-t/2} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) = 0$.

En prenant $t = 0$, $t = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ et $t = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$, on obtient :

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ e^{2\pi/\sqrt{3}}a - e^{-\pi/\sqrt{3}}c = 0 \\ e^{\pi/\sqrt{3}}a + e^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}}b = 0 \end{cases}$$

Ce système donne facilement $a = b = c = 0$ mais on pouvait aussi (par exemple) prendre la limite quand t tend vers $+\infty$, qui donnait une contradiction sauf si $a = 0$ (donc $a = 0$).

Donc la famille $\mathcal{B}$ est libre.

3b Calculer le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $af_1 + bf_2 + cf_3$ au voisinage de 0 et montrer d'une autre manière que la famille $\mathcal{B}$ est libre.

On calcule le DL à l'ordre 2 en 0 de $ae^t + be^{-t/2} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + ce^{-t/2} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= a \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + o_0(t^2)\right) + b \left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2/4}{2} + o_0(t^2)\right) \left(\frac{t\sqrt{3}}{2} + o_0(t^2)\right) \\ &\quad + c \left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2/4}{2} + o_0(t^2)\right) \left(1 - \frac{3t^2}{8} + o_0(t^2)\right) \end{aligned}$$

donc :

$$a + c + t \left(a + b \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{2} \right) + t^2 \left(\frac{a}{2} - b \frac{\sqrt{3}}{4} + c \left(\frac{1}{8} - \frac{3}{8} \right) \right) + o_0(t^2) = 0$$

donc par unicité de développement limité :

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a + b \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{2} = 0 \\ \frac{a}{2} - b \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}c = 0 \end{cases} \quad \text{donc } (L_2 - 2L_3) : b \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0$$

$$\text{donc } b = 0 \text{ et } \begin{cases} a + c = 0 \\ a - \frac{c}{2} = 0 \end{cases} \quad \text{donc } a = c = 0. \text{ Donc la famille } \mathcal{B} \text{ est libre.}$$

La famille $\mathcal{B}$ est donc une base de G .

4 Montrer que $\forall i \in \{1, 2, 3\}, D(f_i) \in G$. En déduire que G est stable par D , c'est-à-dire que $\forall g \in G, D(g) \in G$.

Calculons pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'_1(t) &= f_1(t) \text{ donc } D(f_1) = f_1 \\ f'_2(t) &= -\frac{1}{2}f_2(t) + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3(t) \text{ donc } D(f_2) = -\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3 \\ f'_3(t) &= -\frac{1}{2}f_3(t) - \frac{\sqrt{3}}{2}f_2(t) \text{ donc } D(f_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3 \end{aligned}$$

Ainsi, $D(f_i) \in G$ pour $i = 1, 2, 3$, donc par linéarité de D , $G = Vect(f_1, f_2, f_3)$ est stable par D .

On notera $\hat{D}$ l'endomorphisme de G induit par la restriction de D à G .

5a Donner la matrice de $\hat{D}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Vu les calculs ci-dessus, cette matrice est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

5b Déterminer $\hat{D}^3$.

On calcule :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

puis :

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

donc $\widehat{D}^3 = Id_G$.

5c Justifier que $\widehat{D}$ est un automorphisme de G et exprimer $(\widehat{D})^{-1}$ en fonction de $\widehat{D}$.

D'après le théorème de caractérisation des bijections, il en résulte que $\widehat{D}$ est bijective donc un automorphisme de G et que $(\widehat{D})^{-1} = \widehat{D}^2$.

Partie 2 : On cherche dans cette partie à résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E}) : y''' = y$.

Une solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$ est une fonction trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant $\forall t \in \mathbb{R}, f'''(t) = f(t)$.
On ne s'intéresse qu'aux solutions à valeurs réelles, comme pour toutes les autres équations différentielles dont il est question ci-dessous.

6 Montrer que toute solution de $(\mathcal{E})$ est de classe C^∞ .

Soit y une solution de $(\mathcal{E})$. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que y est de classe $\mathcal{C}^n$:

- I.: y est 3 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ donc de classe $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$.
- H.: Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons y de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. On a $y''' = y$ donc y''' est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ donc y est de classe $\mathcal{C}^{n+3}$ donc de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.
- C.: pour tout $n \in \mathbb{N}$, y est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ donc y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

7 Montrer que la fonction nulle est la seule solution polynomiale de $(\mathcal{E})$. Notons $T = D^3 - Id$ où Id est l'identité de E .

Soit $y = P(x)$ une solution polynomiale de $(\mathcal{E})$ et notons $n = \deg(P)$. Alors $\deg(P''') \leq n-3$ et $P''' = P$ donc $n \leq n-3$. Impossible sauf si $\deg(P) = -\infty$ ie y est la fonction nulle.

Réciproquement, la fonction nulle est évidemment solution.

8 Montrer que $G \subset \ker(T)$.

On a $\widehat{D}^3 = Id_G$ donc pour tout $g \in G$, $D^3(g) = g$ donc $T(g) = 0$ donc $g \in \ker(T)$. Donc $G \subset \ker(T)$.

Soit f une solution de $(\mathcal{E})$. Notons $g = f''' + f' + f$.

9 Montrer que g est solution de l'équation différentielle $y' = y$.

On a $g' = (f''' + f' + f)' = f'''' + f'' + f' = f''' + f' + f$ car $f'''' = f'$. Donc $g' = g$.

10a Résoudre rapidement l'équation différentielle $y' = y$.

Solution générale : $y(t) = \lambda e^t$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

10b Résoudre l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$, on donnera une base de l'ensemble des solutions (à valeurs réelles !!).

EDLH 2nd ordre coeff constants. Equ caractéristique : $r^2 + r + 1 = 0$ de solutions $r = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Solution générale de l'équation : $y(t) = e^{-t/2} \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- 11** Soit $A \in \mathbb{R}$. Décrivez l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + y' + y = Ae^t$.
On cherche une solution particulière de la forme $y(t) = Be^t$. D'où $y = y' = y''$ d'où :

$$y'' + y' + y = \lambda e^t \Leftrightarrow 3Be^t = Ae^t \Leftrightarrow B = \frac{A}{3}.$$

Sol particulière de l'équation : $y(t) = \frac{A}{3}e^t$.

Sol générale de l'équation : $y(t) = e^{-t/2} \left(\lambda \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t \right) + \mu \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t \right) \right) + \frac{A}{3}e^t, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- 12** En déduire que $\ker(T) \subset G$.

$\ker(T)$ est l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$.

Soit $f \in \ker(T)$ et $g = f'' + f' + f$. Alors g est de la forme Ae^t d'après 9. Donc f est solution de $y'' + y' + y = Ae^t$ est donc (d'après 11) combinaison linéaire de f_1, f_2 et f_3 , donc appartient à G . Donc $\ker(T) \subset G$.

- 13** Déterminer les solutions de $(\mathcal{E})$.

Ainsi, $\ker(T) = G$ est l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$.

Corrigé de l'exercice 2 : Matrices stochastiques.

Questions préliminaires :

- 1** Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})$.

- 1a** A quelle condition sur p, q, r, s le produit AB est-il bien défini ? Quelle est alors la taille de la matrice AB ?

La condition est $q = r$ et dans ce cas, AB est une matrice à p lignes et s colonnes.

- 1b** Cette condition étant supposée vérifiée, on note $c_{i,j}$ le terme général de la matrice AB . Exprimer $c_{i,j}$ en fonction des coefficients des matrices A et B .

Rappelons pour $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq s$:

$$c_{i,j} = L_i(A) \times C_j(B) = \sum_{k=1}^q a_{i,k} b_{k,j}$$

- 2** Soit $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $a_{i,j}^{(p)}$ le terme général de la matrice A_p .

Par définition, on dit que la suite de matrices (A_p) converge vers une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ si pour tous indices i, j , la suite réelle $(a_{i,j}^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers $a_{i,j}$.

- 2a** Etant données des suites de réels (λ_p) et (μ_p) que l'on suppose convergentes de limites respectives λ et μ , montrer que si la suite de matrices (A_p) converge vers A et la suite de matrices (B_p) converge vers B , alors la suite $(\lambda_p A_p + \mu_p B_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers $\lambda A + \mu B$.

Pour tous indices i et j , le terme général de $\lambda_p A_p + \mu_p B_p$ est $\lambda_p a_{i,j}^{(p)} + \mu_p b_{i,j}^{(p)}$ (notation évidente), donc il converge par hypothèse (somme de suites convergentes) vers $\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j}$. Ceci montre que la suite $(\lambda_p A_p + \mu_p B_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers $\lambda A + \mu B$.

2b Montrer que sous les mêmes conditions, la suite $(A_p B_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers AB .

De même, on a avec les notations de ci-dessus et $c_{i,j}^{(p)}$ désignant le terme général d'indices

i, j de $A_p B_p : c_{i,j}^{(p)} = \sum_{k=1}^q a_{i,k}^{(p)} b_{k,j}^{(p)}$ donc ce terme général converge comme somme et produit de

suites convergentes vers $\sum_{k=1}^q a_{i,k} b_{k,j}$ qui est le terme général d'indices i, j de AB . Donc la suite

$(A_p B_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers AB .

Soit $r \in \mathbb{N}$ tel que $r \geq 2$. Une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ est dite stochastique lorsqu'elle vérifie les deux conditions suivantes :

- (i) : pour tout $(i, j) \in [1, r]^2$, $a_{i,j} \in [0, 1]$,
- (ii) : pour tout $i \in [1, r]$, on a $\sum_{j=1}^r a_{i,j} = 1$.

On note $\mathcal{S}_r$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$.

Conformément à ce qui précède, on dira que la matrice A^n a une limite finie si tous les coefficients de A^n admettent une limite finie. Et la limite de A^n sera la matrice des limites des suites de coefficients de A^n .

Partie 1 :

3 Montrer que le produit de deux éléments de $\mathcal{S}_2$ est dans $\mathcal{S}_2$.

Soient $A_1, A_2 \in \mathcal{S}_2$. Ces matrices peuvent s'écrire : $A_1 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d, a', b', c', d' \in [0, 1]$.

Alors :

$$A_1 A_2 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{pmatrix}$$

et tous ces coefficients sont clairement positifs.

De plus, $aa' + cb' + ac' + cd' = a(a' + c') + c(b' + d') = a + c = 1$ et de même pour la deuxième ligne $ba' + db' + bc' + dd' = 1$.

Cela montre en outre, puisque les coefficients de $A_1 A_2$ sont positifs, qu'ils sont dans $[0, 1]$.

Donc $A_1 A_2 \in \mathcal{S}_2$.

4 On pose $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ et on note I_2 la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4a Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $A^2 = aA + bI_2$.

On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{5}{12} & \frac{7}{12} \end{pmatrix}$. Ainsi pour $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} A^2 &= aA + bI_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{5}{12} & \frac{7}{12} \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{5}{12} & \frac{7}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b + a/3 & 2a/3 \\ a/2 & b + a/2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} b + a/3 = \frac{4}{9} \\ 2a/3 = \frac{5}{9} \\ a/2 = \frac{5}{12} \\ b + a/2 = \frac{7}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{6} \\ b = \frac{1}{6} \end{cases} \end{aligned}$$

donc $A^2 = \frac{5}{6}A + \frac{1}{6}I_2$.

4b Montrer qu'il existe deux suites de réels (a_n) et (b_n) telles que l'on ait :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = a_n A + b_n I_2$$

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ qu'il existe a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I_2$:

- I.: $n = 1$. Il suffit de poser $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$ pour avoir $A^n = a_n A + b_n I_2$.
- H.: soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons qu'il existe a_n et b_n réels tels que $A^n = a_n A + b_n I_2$. Alors :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= AA^n = A(a_n A + b_n I_2) = a_n A^2 + b_n A \\ &= a_n \left(\frac{5}{6}A + \frac{1}{6}I_2 \right) + b_n A = \left(\frac{5}{6}a_n + b_n \right) A + \frac{1}{6}a_n I_2 \end{aligned}$$

Il suffit donc de poser $a_{n+1} = \frac{5}{6}a_n + b_n$ et $b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n$ pour avoir $A^{n+1} = a_{n+1}A + b_{n+1}I_2$.

- C. : pour tout $n \geq 1$, il existe a_n et b_n réels tels que $A^n = a_n A + b_n I_2$.

4c Vérifier que la suite $(a_n + b_n)$ est constante et donner sa valeur.

Observons que pour tout $n \geq 1$, $a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{5}{6}a_n + b_n + \frac{1}{6}a_n = a_n + b_n$. Donc la suite $(a_n + b_n)$ est constante, de valeur $a_1 + b_1 = 1$.

4d En déduire l'expression de a_n en fonction de n . Exprimer de même b_n en fonction de n .

On en déduit pour tout $n \geq 1$: $a_{n+1} = \frac{5}{6}a_n + b_n = \frac{5}{6}a_n + 1 - a_n = 1 - \frac{1}{6}a_n$.

La suite (a_n) est donc arithmético-géométrique. On résoud : $c = 1 - \frac{1}{6}c \Leftrightarrow c = \frac{6}{7}$ et on pose $v_n = a_n - c$. Alors pour tout $n \geq 1$:

$$v_{n+1} = a_{n+1} - c = 1 - \frac{1}{6}a_n - \left(1 - \frac{1}{6}c\right) = -\frac{1}{6}v_n$$

donc $v_n = \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} v_1 = \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{6}{7}\right) = \frac{1}{7} \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$ donc :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{7} \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{6}{7} \\ b_n &= 1 - a_n = \frac{-1}{7} \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{1}{7} \end{aligned}$$

4e En déduire l'expression de A^n en fonction de n , de A et de I_2 .

Ainsi :

$$A^n = \left(\frac{1}{7} \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{6}{7}\right) A + \left(\frac{-1}{7} \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{1}{7}\right) I_2$$

4f Montrer que A^n admet une limite que l'on déterminera quand n tend vers $+\infty$. Nous la noterons A^∞ .

Donner l'expression de A^∞ en fonction de A et de I_2 et montrer que A^∞ est stochastique.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{6}{7}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{1}{7}$ donc d'après 2a), on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n = \frac{6}{7}A + \frac{1}{7}I_2 = A^\infty$. Ainsi

$$A^\infty = \frac{6}{7} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} + \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

qui est visiblement stochastique.

Partie 2 : On pose $B = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ \frac{3}{0} & \frac{3}{0} & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, et $P = \begin{pmatrix} -9/8 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et on note

I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5a Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{aligned} PX &= Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -9/8 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -9/8x + y = a \\ x + y = b \\ z = c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 17/8x = b - a \\ x + y = b \\ z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{8}{17}a + \frac{8}{17}b \\ y = \frac{8}{17}a + \frac{9}{17}b \\ z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{17} & \frac{8}{17} & 0 \\ \frac{8}{17} & \frac{9}{17} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{donc } P \text{ est inversible et } P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{17} & \frac{8}{17} & 0 \\ \frac{8}{17} & \frac{9}{17} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5b Déterminer une base de $\ker(B - 2I_3)$.

On a :

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(B - 2I_3) &\Leftrightarrow (B - 2I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ \frac{4}{2} & \frac{4}{2} & 0 \\ \frac{3}{0} & \frac{3}{0} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X \in \text{Vect}(X_1, X_2) \end{aligned}$$

donc $\ker(B - 2I_3) = \text{Vect}(X_1, X_2)$ avec $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Or X_1 et X_2 sont non colinéaires donc (X_1, X_2) est une base de $\ker(B - 2I_3)$.

5c Déterminer une base de $\ker\left(B - \frac{7}{12}I_3\right)$.

On a :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker\left(B - \frac{7}{12}I_3\right) &\Leftrightarrow \left(B - \frac{7}{12}I_3\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{0} & \frac{3}{0} & \frac{17}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}y = 0 \\ \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}y = 0 \\ \frac{17}{12}z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 9y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{8}y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -\frac{9}{8} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc $\ker\left(B - \frac{7}{12}I_3\right) = \text{Vect}(X_3)$ avec $X_3 = \begin{pmatrix} -\frac{9}{8} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$ donc X_3 est une base de $\ker\left(B - \frac{7}{12}I_3\right)$.

5d Le calcul du produit PDP^{-1} donne $PDP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On ne cherchera pas à vérifier ce

calcul.

Pour λ réel, on pose $D_\lambda = D + \lambda I_3$.

Montrer qu'il existe un unique réel λ tel que $PD_\lambda P^{-1}$ soit stochastique. On notera $B_\lambda = PD_\lambda P^{-1}$.

On a :

$$\begin{aligned} PD_\lambda P^{-1} &= P(D + \lambda I_3)P^{-1} = PDP^{-1} + \lambda PP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \lambda I_3 = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} + \lambda & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 + \lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Or } \frac{5}{4} + \lambda + \frac{3}{4} = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1 - 2 = -1 \text{ et pour cette valeur de } \lambda, PD_\lambda P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est}$$

clairement stochastique.

5e Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_λ^n s'exprime simplement en fonction de D_λ^n .

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $B_\lambda^n = PD_\lambda^n P^{-1}$:

- I.: $n = 0$: $B_\lambda^n = I_3$ et $PD_\lambda^n P^{-1} = PP^{-1} = I_3$ donc $B_\lambda^n = PD_\lambda^n P^{-1}$.
- H.: soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $B_\lambda^n = PD_\lambda^n P^{-1}$.
Alors : $B_\lambda^{n+1} = B_\lambda^n B_\lambda = PD_\lambda^n P^{-1} B_\lambda = PD_\lambda^n P^{-1} PD_\lambda P^{-1} = PD_\lambda^n I_3 D_\lambda P^{-1} = PD_\lambda^{n+1} P^{-1}$.
- C.: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_\lambda^n = PD_\lambda^n P^{-1}$.

5f On suppose que λ prend la valeur déterminée dans la question 5b.

Montrer que B_λ^n admet alors une limite que l'on déterminera quand n tend vers l'infini. Nous la noterons B^∞ . Montrer que B^∞ est stochastique.

On a donc $\lambda = -1$ et $B_\lambda^n = PD_{-1}^n P^{-1}$.

$$\text{Or } D_{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ donc par récurrence immédiate, } D_{-1}^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{-5}{12}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et}$$

$$\text{puisque } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-5}{12}\right)^n = 0, \text{ il vient } \lim_{n \rightarrow +\infty} D_{-1}^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, d'après 2b, il vient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} B_\lambda^n = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -9/8 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{8}{17} & \frac{8}{17} & 0 \\ \frac{8}{17} & \frac{9}{17} & 0 \\ \frac{17}{0} & \frac{17}{0} & 1 \end{pmatrix}$$

donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} B_\lambda^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{8}{17} & \frac{8}{17} & 0 \\ \frac{8}{17} & \frac{9}{17} & 0 \\ \frac{17}{0} & \frac{17}{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{17} & \frac{9}{17} & 0 \\ \frac{8}{17} & \frac{9}{17} & 0 \\ \frac{17}{0} & \frac{17}{0} & 1 \end{pmatrix} = B^\infty$$

qui est clairement stochastique.

Corrigé de l'exercice 3 : On note E l'ensemble de suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} + u_n$$

Autrement dit :

$$E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} + u_n\}$$

On admet qu'étant donnés deux réels fixés α et β , il existe une et une seule suite $u \in E$ telle que $u_0 = \alpha$ et $u_1 = \beta$.

1 Montrer que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. De plus :

- $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in E$ (car pour tout n , $0 = (n+1)0 + 0$).
- Soient $u, v \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors pour tout entier n :

$$\begin{aligned} (\lambda u + \mu v)_{n+2} &= \lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2} = \lambda((n+1)u_{n+1} + u_n) + \mu((n+1)v_{n+1} + v_n) \\ &= (n+1)(\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) + \lambda u_n + \mu v_n \\ &= (n+1)(\lambda u + \mu v)_{n+1} + (\lambda u + \mu v)_n \end{aligned}$$

donc $\lambda u + \mu v \in E$

Donc E est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ donc est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

2 Soit la suite $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E définie par $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$.

2a Calculer les termes a_2, a_3 et a_4 . (pour vérification, $a_5 = 30$).

On calcule :

$$a_2 = a_1 + a_0 = 1; a_3 = 2a_2 + a_1 = 2; a_4 = 3a_3 + a_2 = 7$$

2b Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est un entier naturel.

Il suffit de rédiger proprement une récurrence double (faites-le !!)

2c Etudier la monotonie de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ puis montrer qu'elle diverge vers $+\infty$.

On a pour tout entier $n \geq 1$, $a_{n+1} - a_n = na_n + a_{n-1} - a_n = (n-1)a_n + a_{n-1} \in \mathbb{N}$ comme somme d'entiers naturels (grâce à 2b). Donc $a_{n+1} - a_n \geq 0$ donc la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est croissante. Supposons cette suite convergente de limite L . Alors $L \geq 1$ (car pour tout $n \geq 2$, $a_n \geq 1$). Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)a_{n+1} = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} ((n+1)a_{n+1} + a_n) = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+2} = +\infty$, absurde !

Donc (a_n) ne converge pas mais est croissante (à partir du rang 1=). D'après le théorème de la limite monotone, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

3 Soit la suite $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E définie par $b_0 = 0$ et $b_1 = 1$.

3a Calculer les termes b_2, b_3 et b_4 . (pour vérification, $b_5 = 43$).

On calcule :

$$b_2 = b_1 + b_0 = 1; b_3 = 2b_2 + b_1 = 3; b_4 = 3b_3 + b_2 = 10$$

3b Etudier la convergence de la suite $b = (b_n)$.

On montre comme en 2c que la suite (b_n) est croissante puis qu'elle diverge vers $+\infty$.

4 On suppose que la suite $u = (u_n)$ est un élément de E .

4a Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha a_n + \beta b_n$.

Posons $\alpha = u_0$ et $\beta = u_1$. Alors $u_0 = \alpha a_0 + \beta b_0$ et $u_1 = \alpha a_1 + \beta b_1$. De plus, $\alpha a + \beta b \in E$ car E est stable par combinaisons linéaires.

Enfin, une suite de E est entièrement déterminée par ses deux premiers termes et u est aussi dans E donc $u = \alpha a + \beta b$, i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha a_n + \beta b_n$.

4b Montrer que E est un plan vectoriel (on en précisera une base).

On a donc $E = Vect(a, b)$. De plus les suites a et b sont non nulles et non proportionnelles (il suffit de regarder les termes d'indices 0 et 1 pour voir cela) donc (a, b) est libre.

Donc (a, b) est une base de E qui est donc un plan vectoriel.

5 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = a_{n+1}b_n - a_nb_{n+1}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$w_n = (-1)^{n+1}.$$

Montrons ceci par récurrence simple (étonnament!) sur $n \in \mathbb{N}$:

- I.: $n = 0$, $w_0 = a_1b_0 - a_0b_1 = -1 = (-1)^{n+1}$.

- H.: soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $w_n = (-1)^{n+1}$. Alors :

$$\begin{aligned}w_{n+1} &= a_{n+2}b_{n+1} - b_{n+2}a_{n+1} = ((n+1)a_{n+1} + a_n)b_{n+1} - ((n+1)b_{n+1} + b_n)a_{n+1} \\&= (n+1)(a_{n+1}b_{n+1} - a_{n+1}b_{n+1}) + a_nb_{n+1} - b_na_{n+1} = a_nb_{n+1} - b_na_{n+1} \\&= -w_n = -(-1)^{n+1} = (-1)^{n+2}\end{aligned}$$

- Conc.: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = (-1)^{n+1}$.

6 Pour tout entier $n \geq 1$, on définit $f_n = \frac{a_n}{b_n}$.

6a Exprimer $f_{n+1} - f_n$ en fonction de w_n , b_n et b_{n+1} .

On a pour tout n :

$$f_{n+1} - f_n = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_n}{b_n} = \frac{w_n}{b_nb_{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{b_nb_{n+1}}.$$

6b Montrer que les suites $(f_{2n})_{n \geq 1}$ et $(f_{2n-1})_{n \geq 1}$ sont adjacentes.

- Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_{n+1} - f_n| = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f_{n+1} - f_n) = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f_{2n} - f_{2n-1}) = 0$

- De plus :

$$\begin{aligned}f_{2n+2} - f_{2n} &= f_{2n+2} - f_{2n+1} + f_{2n+1} - f_{2n} = \frac{(-1)^{2n+2}}{b_{2n+1}b_{2n+2}} + \frac{(-1)^{2n+1}}{b_{2n+1}b_{2n}} \\&= \frac{1}{b_{2n+1}b_{2n+2}} - \frac{1}{b_{2n+1}b_{2n}} = \frac{b_{2n} - b_{2n+2}}{b_{2n}b_{2n+1}b_{2n+2}} \leq 0\end{aligned}$$

car b est croissante. Donc $(f_{2n})_{n \geq 1}$ est décroissante.

- On montrer de même (faites-le !!) que $(f_{2n-1})_{n \geq 1}$ est croissante.
Donc ces deux suites sont adjacentes.

6c Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ est convergente. On notera L sa limite.

A l'aide des valeurs calculées au début de l'exercice, donner un encadrement le plus précis possible de L par des nombres rationnels explicites.

Puisqu'adjacentes, ces deux suites convergent vers une même limite finie $L \in \mathbb{R}$. De plus, ce sont les suites extraites des termes d'indices pairs et impairs de $(f_n)_{n \geq 1}$ donc cette dernière suite converge aussi vers L .

Le théorème sur les suites adjacentes donne aussi pour tout $n \geq 1$:

$$f_{2n-1} \leq f_{2n+1} \leq L \leq f_{2n+2} \leq f_{2n}$$

$$\text{Or } f_4 = \frac{a_4}{b_4} = \frac{7}{10} \text{ et } f_3 = \frac{2}{3} \text{ donc } \frac{2}{3} \leq L \leq \frac{7}{10}.$$

7a Justifier que pour tout entier $n \geq 1$: $0 < |f_n - L| \leq \frac{1}{b_n^2}$.

Il est facile de vérifier que (b_n) est strictement croissante. Or $f_{2n+2} - f_{2n} = \frac{b_{2n} - b_{2n+2}}{b_{2n}b_{2n+1}b_{2n+2}}$, donc la suite (f_{2n}) est strictement décroissante. De même pour la monotonie de $(f_{2n-1})_{n \geq 1}$ qui est stricte et donc aussi les inégalités strictes :

$$f_{2n-1} < f_{2n+1} < L < f_{2n+2} < f_{2n}$$

donc pour tout n , $f_n < L < f_{n+1}$ ou $f_{n+1} < L < f_n$. Dans les deux cas, $0 < |f_n - L| \leq \frac{1}{b_n b_{n+1}}$ (par 6a), donc $0 < |f_n - L| \leq \frac{1}{b_n^2}$.

7b Montrer que L est un nombre irrationnel. On pourra raisonner par l'absurde.

Supposons $L \in \mathbb{Q}$, alors L s'écrit $L = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}$ et la fraction irréductible. Alors (7a),

$$0 < \left| f_{3q} - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{b_{3q}^2} \text{ donc } 0 < |q f_{3q} - p| \leq \frac{q}{b_{3q}^2}.$$

Or $q \geq 1$, donc $3q \geq 3$ sachant que $b_3 = 3$ et que (b_n) est une suite d'entiers strictement croissante, on a $b_{3q} \geq 3q$ donc $b_{3q}^2 > q$ donc $\frac{q}{b_{3q}^2} < 1$ donc $0 < |q f_{3q} - p| < 1$, ce qui est absurde

car $|q f_{3q} - p| \in \mathbb{N}$.

Donc L est irrationnel.

8 On note $\mathcal{C}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formé des suites convergentes (on ne demande pas de démontrer que c'est bien un sev).

8a Montrer que si $v \in E \cap \mathcal{C}$, alors v converge vers 0.

Soit $v \in E \cap \mathcal{C}$ et notons l la limite de v . On a pour tout n , $v_{n+2} = (n+1)v_{n+1} + v_n$. Si la limite de v était non nulle, ceci donnerait (sans forme indéterminée), $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+2} = \pm\infty$, ce qui serait absurde.

Donc $l = 0$.

8b Montrer que $E \cap \mathcal{C}$ est une droite vectorielle.

Soit $u \in E$, alors il existe α et β réels tels que $u = \alpha a + \beta b$.

Hormis pour le terme d'indice 0, b ne s'annule pas et en mettant de côté ce terme, on peut donc écrire $u = b \left(\alpha \frac{a}{b} + \beta \right) = b(\alpha f + \beta)$ où $f = (f_n)_{n \geq 1}$.

La suite f a pour limite L donc la suite $\alpha f + \beta$ a pour limite $\alpha L + \beta$. Si ceci est non nul, alors u tend vers $\pm\infty$ (car b diverge vers $+\infty$).

Donc, pour que u converge, il est nécessaire que $\alpha L + \beta = 0$. Dans ce cas, $u = \alpha a - \alpha L b = \alpha(a - Lb)$.

Donc $E \cap \mathcal{C} \subset Vect(a - Lb)$.

Réciproquement, $a - Lb \in E$, et pour tout entier $n \geq 1$:

$$|a_n - Lb_n| = b_n |f_n - L| \leq b_n \frac{1}{b_n^2} = \frac{1}{b_n}$$

donc par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - Lb_n) = 0$.

Donc $a - Lb \in E \cap \mathcal{C}$ donc aussi $Vect(a - Lb) \subset E \cap \mathcal{C}$ (car $E \cap \mathcal{C}$ est un sev).

Donc $E \cap \mathcal{C} = Vect(a - Lb)$. C'est bien une droite vectorielle car $a - Lb$ est non nulle (et même aucun de ses termes n'est nul car $\nexists \notin \mathbb{Q}$).

8c Les sous-espaces E et $\mathcal{C}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

Bien sûr que non puisque l'intersection n'est pas réduite à la suite nulle.

8d Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq a_n \leq n!$ et $0 \leq b_n \leq n!$.

Par récurrence double :

- I.: ok pour $n = 0$ et $n = 1$ compte tenu des valeurs des termes d'indice 0 et 1 car $0! = 1! = 1$.
- H.: Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $a_n \leq n!$, $b_n \leq n!$, $a_{n+1} \leq (n+1)!$ et $b_{n+1} \leq (n+1)!$. Alors :

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= (n+1)a_{n+1} + a_n \leq (n+1)(n+1)! + n! \leq n!(n^2 + 2n + 2) \\ &\leq n!(n^2 + 3n + 2) = n!(n+1)(n+2) = (n+2)! \end{aligned}$$

Même calcul pour b_{n+2} .

- C.: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_n \leq n!$ et $0 \leq b_n \leq n!$.

8e A-t-on $E + \mathcal{C} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

Non, car si une suite v est dans $E + \mathcal{C}$ donc combinaison linéaire de a , de b , et d'une suite convergente alors 8d montre que la suite de terme général $\frac{v_n}{(n!)^2}$ doit tendre vers 0. Ce n'est pas possible par exemple pour la suite v définie par $v_n = (n!)^2$. Donc $E + \mathcal{C}$ n'est pas $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tout entier.