

D.S.7 samedi 4 Avril 2026

Exercice 1 : Soit $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles carrées de taille 3×3 .

La transposée d'une matrice M est notée M^T .

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques de E et $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices anti-symétriques de E .

On note F l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}$ dont la somme des termes de chaque ligne et de chaque colonne est nulle.

On note :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1 Montrer que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont des sev supplémentaires de E : c'est une question de cours, on demande de redémontrer ce résultat, mais on ne demande pas de redémontrer que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont des sev de E .

2a Soit $M \in \mathcal{S}$. Montrer que $M \in F \Leftrightarrow BM = 0_E$.

2b En déduire que F est un sev de E .

2c Montrer que si $M, N \in F$ et $MN = NM$, alors $MN \in F$.

3a Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$. Montrer que la condition $M \in F$ se traduit par un système sur les coefficients a, b, c, d, e, f .

3b Résoudre ce système en exprimant les solutions à l'aide de a, c et f et en déduire que la famille $\mathcal{B}_1 = (E_1, E_2, E_3)$ est une base de F .

4 On rappelle que $GL_3(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices inversibles de E .
Montrer que $GL_3(\mathbb{R}) \cap F = \emptyset$.

5 Soit $M = (a_{i,j}) \in E$. On définit $Tr(M) = a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3}$ (la trace de M).

5a Montrer que $P = \{M \in F \mid Tr(M) = 0\}$ est un plan vectoriel de E .
Montrer que la famille $\mathcal{B}_2 = (E_1 - E_3, E_2 - E_3)$ est une base de P .

5b Soit $D = Vect(2E_1 - E_2 + 2E_3)$, montrer que $D \oplus P = F$.

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes de degrés inférieur ou égaux à $2n$.

Pour tout $k \in [0, 2n]$, on note $e_k = X^k$ et $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \dots, e_{2n})$ la base canonique de E . Soit h l'application définie sur E par :

$$\forall P \in E, \quad h(P) = \int_{-1}^1 P(t) dt.$$

- 1 Montrer que h est une forme linéaire sur E .
- 2 Déterminer $h(e_k)$ pour tout $k \in [0, 2n]$.
- 3 Déterminer les dimensions de $\text{Im}(h)$ et de $\ker(h)$.
- 4 Prouver qu'il existe une base $\mathcal{U}$, qu'on ne cherchera pas à expliciter, de $\ker(h)$, dont le premier vecteur est e_1 .
- 5 Montrer que $E = \text{Vect}(e_0) \oplus \ker(h)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère l'application T_λ définie sur E par :

$$\forall P \in E, \quad T_\lambda(P) = P + \lambda h(P) X$$

- 6 Vérifier que T_λ est un endomorphisme de E .
- 7 Déterminer la matrice de T_λ dans une base adaptée à $E = \text{Vect}(e_0) \oplus \ker(h)$ construite en utilisant la base $\mathcal{U}$.
- 8 Montrer que T_λ est un automorphisme de E .
- 9 Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, calculer $T_\alpha \circ T_\beta$.
- 10 Déterminer T_λ^{-1} .

Exercice 3 :

- 1 Un résultat préliminaire : soit E un espace vectoriel de dimension $N \geq 2$. On note H_1, H_2 deux hyperplans distincts de E , c'est-à-dire des sous-espaces vectoriels de E tels que :

$$\dim(H_1) = \dim(H_2) = N - 1 \text{ et } H_1 \neq H_2$$

1a Prouver que $H_1 + H_2 = E$

1b En déduire la dimension de $H_1 \cap H_2$.

- 2 Pour tout polynôme P de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$, on pose :

$$f(P) = \frac{X^2 - 1}{2} P'' - X P' + P$$

On note $\mathcal{C} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de E . Montrer que f est un endomorphisme de E .

- 3 Calculer $M = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$, la matrice de f relativement à la base $\mathcal{C}$.

4 Montrer que f est un projecteur de E .

5 Montrer que $\ker(f)$ est un plan vectoriel dont on donnera une base.

6 Montrer l'inclusion $\operatorname{Im}(f) \subset G$ où $G = \{P \in E = \mathbb{R}_3[X] \mid P'(1) = P'(-1) = 0\}$.

7 Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'application linéaire $\varphi_a : \begin{matrix} E \rightarrow \mathbb{R} \\ P \mapsto \varphi_a(P) = P'(a) \end{matrix}$ (on ne demande pas de prouver qu'elle est linéaire).

7a Montrer que φ_a est surjective.

7b En déduire la dimension de $\ker(\varphi_a)$.

7c En déduire que G est un sous-espace vectoriel de E et quelle est sa dimension.

8 Montrer que $\operatorname{Im}(f) = G$.

9 Préciser une base de $\operatorname{Im}(f)$

10 En déduire une matrice P inversible telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale. On demande d'expliciter P et $P^{-1}MP$, mais pas de calculer P^{-1} .

Exercice 4 : Soit $n \geq 2$ et des réels $a_1, a_2, \dots, a_n$. On note $A_n = \begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{pmatrix}$

la matrice carrée de taille n dont les coefficients non diagonaux valent tous 1 et le i -ième coefficient diagonal vaut $1+a_i$.

On note $d_n = \det(A_n)$.

1 Calculer d_2 et d_3 .

2a Montrer que $d_n = \prod_{i=1}^{n-1} a_i + a_n \det \begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & & 1 & 1+a_{n-1} & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2b En déduire une relation entre d_n et d_{n-1} .

2c Donner une formule pour d_n en fonction uniquement de $n \geq 2$ et des réels $a_1, \dots, a_n$ et la démontrer par récurrence.

Exercice 5 : Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $3n$, $n \in \mathbb{N}^*$, et f un endomorphisme de E , de rang $2n$.

1a Déterminer la dimension de $\ker(f)$.

1b Soit g la restriction de f au sous-espace vectoriel $\operatorname{Im}(f)$, c'est-à-dire l'application :

$$g : \begin{array}{l} \operatorname{Im}(f) \rightarrow E \\ \vec{x} \mapsto g(\vec{x}) = f(\vec{x}) \end{array}$$

Montrer $\operatorname{Im}(g) = \operatorname{Im}(f^2)$ et $\ker(g) = \ker(f) \cap \operatorname{Im}(f)$.

En déduire $\operatorname{rg}(f^2) \geq n$.

2 On suppose désormais en plus que $f^3 = 0$.

2a Déterminer la valeur de $\operatorname{rg}(f^2)$.

2b Soit S un supplémentaire de $\ker(f^2)$ dans E . Montrer que S est de dimension, n .

On considère alors $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ une base de S .

2c Montrer que la famille $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n, f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n), f^2(\vec{e}_1), f^2(\vec{e}_2), \dots, f^2(\vec{e}_n))$ est une base de E .

2d Ecrire $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

3 Exemple : soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer $\operatorname{rg}(\varphi)$ avec aussi peu de calculs que possible.

Que vaut φ^3 ? Déterminer avec aussi peu de calculs que possible une base de $\mathbb{R}^3$ où la matrice

de φ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 1 : Soit $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles carrées de taille 3×3 .

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques de E et $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E .

On note F l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}$ dont la somme des termes de chaque ligne et de chaque colonne est nulle.

On note :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1 Montrer que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont des sev supplémentaires de E : c'est une question de cours, on demande de redémontrer ce résultat, mais on ne demande pas de redémontrer que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont des sev de E .

Par analyse-synthèse, vu en cours.

2a Soit $M \in \mathcal{S}$. Montrer que $M \in F \Leftrightarrow BM = 0_E$.

Notons $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$.

Alors $BM = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & b+d+e & c+e+f \\ a+b+c & b+d+e & c+e+f \\ a+b+c & b+d+e & c+e+f \end{pmatrix}$.

Donc $BM = 0_E \Leftrightarrow a+b+c = b+d+e = c+e+f = 0 \Leftrightarrow M \in F$, vu la définition de F et de M (les colonnes de M sont aussi ses lignes).

2b En déduire que F est un sev de E .

Procédons astucieusement : $\Phi : \begin{cases} E \rightarrow E \\ M \mapsto BM \end{cases}$ est linéaire car :

$$\Phi(\lambda M_1 + \mu M_2) = B(\lambda M_1 + \mu M_2) = \lambda BM_1 + \mu BM_2 = \lambda \Phi(M_1) + \mu \Phi(M_2)$$

D'autre part, $F = \ker(\Phi) \cap \mathcal{S}$ donc F est un sev de E comme intersection de sev.

2c Montrer que si $M, N \in F$ et $MN = NM$, alors $MN \in F$.

Soient $M, N \in F$ tels que $MN = NM$. Alors $(MN)^T = N^T M^T = NM$ donc $MN \in \mathcal{S}$. De plus, $BMN = 0_E N = 0_E$. Donc d'après 2a, $MN \in F$.

3a Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$. Montrer que la condition $M \in F$ se traduit par un système sur les coefficients a, b, c, d, e, f .

Comme vu dans la question 2a, $M \in F \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c = 0 \\ b+d+e = 0 \\ c+e+f = 0 \end{cases}$.

3b Résoudre ce système en exprimant les solutions à l'aide de a, c et f et en déduire que la famille $\mathcal{B}_1 = (E_1, E_2, E_3)$ est une base de F .

On a :

$$M \in F \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ b+d+e=0 \\ c+e+f=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-a-c \\ d=-b-e=a+2c+f \\ e=-c-f \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & -a-c & c \\ -a-c & a+2c+f & -c-f \\ c & -c-f & f \end{pmatrix} \Leftrightarrow M = aE_1 + cE_2 + fE_3$$

donc $F = Vect(E_1, E_2, E_3)$.

On montre sans aucune difficulté que la famille (E_1, E_2, E_3) est libre (faites-le!). Donc c'est une base de F .

4 On rappelle que $GL_3(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices inversibles de E .

Montrer que $GL_3(\mathbb{R}) \cap F = \emptyset$.

Soit $M \in GL_3(\mathbb{R}) \cap F$. D'après 2a, $BM = 0_E$. Mais M est inversible. En multipliant par M^{-1} à droite, on obtient $B = 0_E$ ce qui est absurde. Donc $GL_3(\mathbb{R}) \cap F = \emptyset$.

5 Soit $M = (a_{i,j}) \in E$. On définit $Tr(M) = a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3}$ (la trace de M).

5a Montrer que $P = \{M \in F / Tr(M) = 0\}$ est un plan vectoriel de E .

Montrer que la famille $\mathcal{B}_2 = (E_1 - E_3, E_2 - E_3)$ est une base de P .

F est de dimension 3, et la restriction de Tr à F est une forme linéaire sur F (montrez-le!). De plus, Tr est non nulle sur F car par exemple $Tr(E_1) = 2$. Donc $P = \ker(Tr|_F)$ est un hyperplan de F donc $\dim(P) = 2$ et P est un plan vectoriel de E .

On vérifie sans peine que $Tr(E_1 - E_3) = 2 - 2 = 0$ et $Tr(E_2 - E_3) = 2 - 2 = 0$ donc $E_1 - E_3, E_2 - E_3 \in P$.

Soient λ, μ tels que $\lambda(E_1 - E_3) + \mu(E_2 - E_3) = 0_E$. Alors $\lambda E_1 + \mu E_2 - (\lambda + \mu)E_3 = 0_E$ donc $\lambda = \mu = 0$ car la famille $(E_1 - E_3, E_2 - E_3)$ est libre.

Donc $\mathcal{B}_2 = (E_1 - E_3, E_2 - E_3)$ est libre. Or elle est de cardinal $2 = \dim(P)$, et ces matrices sont dans P . Donc $\mathcal{B}_2$ est une base de P .

5b Soit $D = Vect(2E_1 - E_2 + 2E_3)$, montrer que $D \oplus P = F$.

On a $Tr(2E_1 - E_2 + 2E_3) = 2Tr(E_1) - Tr(E_2) + 2Tr(E_3) = 4 - 2 + 4 = 6 \neq 0$ donc D est une droite vectorielle de F , non incluse dans l'hyperplan P de F . Donc $D \oplus P = F$.

Corrigé de l'exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes de degrés inférieur ou égaux à $2n$.

Pour tout $k \in [0, 2n]$, on note $e_k = X^k$ et $B = (e_0, e_1, \dots, e_{2n})$ la base canonique de E . Soit h l'application définie sur E par :

$$\forall P \in E, h(P) = \int_{-1}^1 P(t) dt.$$

1 Montrer que h est une forme linéaire sur E .

Soient $P, Q \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} h(\lambda P + \mu Q) &= \int_{-1}^1 (\lambda P + \mu Q)(t) dt = \int_{-1}^1 (\lambda P(t) + \mu Q(t)) dt \\ &= \lambda \int_{-1}^1 P(t) dt + \mu \int_{-1}^1 Q(t) dt = \lambda h(P) + \mu h(Q) \end{aligned}$$

et h est à valeurs dans $\mathbb{R}$ donc h est une forme linéaire sur E .

2 Déterminer $h(e_k)$ pour tout $k \in [0, 2n]$.

Soit $k \in [0, 2n]$, on a :

$$h(e_k) = \int_{-1}^1 t^k dt = \left[\frac{1}{k+1} t^{k+1} \right]_{-1}^1 = \begin{cases} \frac{2}{k+1} & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}.$$

3 Déterminer les dimensions de $\text{Im}(h)$ et de $\ker(h)$.

h est donc non nulle. Le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan donc $\dim(\ker(h)) = \dim(E) - 1 = 2n$ et $\text{Im}(h)$ est un sev non nul de $\mathbb{R}$ donc $\dim(\text{Im}(h)) = 1$ (on peut aussi passer par la formule du rang).

4 Prouver qu'il existe une base U , qu'on ne cherchera pas à expliciter, de $\ker(h)$, dont le premier vecteur est e_1 .

D'après 2, $e_1 \in \ker(h)$ donc (e_1) est une famille libre de $\ker(h)$, donc d'après le théorème de la base incomplète, il existe une base $\mathcal{U}$ de $\ker(h)$ donc le premier vecteur est e_1 .

5 Montrer que $E = \text{Vect}(e_0) \oplus \ker(h)$.

$h(e_0) = 2 \neq 0$ donc $e_0 \notin \ker(h)$ qui est un hyperplan de E donc $E = \text{Vect}(e_0) \oplus \ker(h)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère l'application T_λ définie sur E par :

$$\forall P \in E, T_\lambda(P) = P + \lambda h(P) X$$

6 Vérifier que T_λ est un endomorphisme de E .

Clairement, $T_\lambda(P)$ est un polynôme de degré au plus $2n$ car $\deg(P) \leq 2n$ et $\deg(\lambda h(P) X) \leq 1 \leq 2n$. Donc T_λ est une application de E dans E .

De plus, si $P, Q \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} T_\lambda(\alpha P + \beta Q) &= \alpha P + \beta Q + \lambda h(\alpha P + \beta Q) X \\ &= \alpha P + \beta Q + \lambda (\alpha h(P) + \beta h(Q)) X \\ &= \alpha (P + \lambda h(P) X) + \beta (Q + \lambda h(Q) X) \\ &= \alpha T_\lambda(P) + \beta T_\lambda(Q) \end{aligned}$$

donc T_λ est linéaire donc est un endomorphisme de E .

7 Déterminer la matrice de T_λ dans une base adaptée à $E = \text{Vect}(e_0) \oplus \ker(h)$ construite en utilisant la base U .

Pour tout $P \in \ker(h)$, on a $T_\lambda(P) = P$. Et $T_\lambda(e_0) = e_0 + 2\lambda X = e_0 + 2\lambda e_1$.

Puisque e_1 est le premier vecteur de $\mathcal{U}$ donc le deuxième vecteur de la base adaptée à $E = \text{Vect}(e_0) \oplus \ker(h)$, dans cette base, la matrice de T_λ est la matrice carrée de taille $2n+1$:

$$Mat(T_\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 2\lambda & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8 Montrer que T_λ est un automorphisme de E .

Cette matrice étant triangulaire inférieure à éléments diagonaux tous non nuls, elle est inversible donc T_λ est un automorphisme de E .

9 Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, calculer $T_\alpha \circ T_\beta$.

Calculons le produit des matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 2\alpha & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 2\beta & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 2(\alpha + \beta) & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $T_\alpha \circ T_\beta = T_{\alpha+\beta}$.

10 Déterminer T_λ^{-1} .

Donc $T_\lambda \circ T_{-\lambda} = T_{-\lambda} \circ T_\lambda = T_0 = Id_E$ donc $T_\lambda^{-1} = T_{-\lambda}$.

Corrigé de l'exercice 3 :

1 Un résultat préliminaire : soit E un espace vectoriel de dimension $N \geq 2$. On note H_1, H_2 deux hyperplans distincts de E , c'est-à-dire des sous-espaces vectoriels de E tels que :

$$\dim(H_1) = \dim(H_2) = N - 1 \text{ et } H_1 \neq H_2$$

1a Prouver que $H_1 + H_2 = E$.

H_1 n'est pas un sev de H_2 (sans quoi, vu l'égalité des dimensions, on aurait $H_1 = H_2$). Donc $H_1 \not\subset H_2$ donc on peut trouver un vecteur $\vec{v} \in H_1 \setminus H_2$.

Alors $\vec{v} \in H_1 + H_2$ (car $H_1 \subset H_1 + H_2$) mais $\vec{v} \notin H_2$. Puisque $H_2 \subset H_1 + H_2$, H_2 est un sous-espace vectoriel de $H_1 + H_2$ mais il n'y a pas égalité (vu le vecteur $\vec{v}$!!) donc pas égalité des dimensions.

Donc $\dim(H_1 + H_2) > \dim(H_2)$ donc $\dim(H_1 + H_2) \geq N$. Or $H_1 + H_2 \subset E$ donc $\dim(H_1 + H_2) \leq N$ donc $\dim(H_1 + H_2) = N = \dim(E)$. Mais puisque c'est un sev de E , il vient $H_1 + H_2 = E$.

1b En déduire la dimension de $H_1 \cap H_2$.

D'après la formule de Grassman, on a donc :

$$\begin{aligned} \dim(H_1 \cap H_2) &= \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 + H_2) \\ &= N - 1 + N - 1 - N = N - 2 \end{aligned}$$

2 Pour tout polynôme P de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$, on pose :

$$f(P) = \frac{X^2 - 1}{2} P'' - X P' + P$$

On note $\mathcal{C} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de E . Montrer que f est un endomorphisme de E .

Soit $P, Q \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= \frac{X^2 - 1}{2} (\lambda P + \mu Q)'' - X (\lambda P + \mu Q)' + (\lambda P + \mu Q) \\ &= \lambda \left(\frac{X^2 - 1}{2} P'' - X P' + P \right) + \mu \left(\frac{X^2 - 1}{2} Q'' - X Q' + Q \right) \\ &= \lambda f(P) + \mu f(Q) \end{aligned}$$

donc f est linéaire.

Soit $P \in E$. Alors $\deg \left(\frac{X^2 - 1}{2} P'' \right) \leq \deg(P)$ et $\deg(X P') \leq \deg(P)$ donc $\deg(f(P)) \leq \deg(P)$ donc $f(P) \in E$.

Donc f est un endomorphisme de E .

3 Calculer $M = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$, la matrice de f relativement à la base $\mathcal{C}$.

On a $f(1) = 1$, $f(X) = 0$; $f(X^2) = X^2 - 1 - 2X^2 + X^2 = -1$ et $f(X^3) = \frac{X^2 - 1}{2} 6X - 3X^3 + X^3 = X^3 - 3X$ donc

$$M = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4 Montrer que f est un projecteur de E .

$$\text{On a } M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M \text{ donc } f \circ f = f \text{ et } f \text{ est linéaire donc } f \text{ est un projecteur.}$$

5 Montrer que $\ker(f)$ est un plan vectoriel dont on donnera une base.

Sans calculs, on a clairement $\text{rg}(M) = 2$ donc $\dim(\ker(f)) = 2$ (formule du rang), et $f(X) = f(X^2 + 1) = 0$ (vu la matrice).

Or X et $X^2 + 1$ sont des vecteurs non colinéaires de $\ker(f)$ donc forment une famille libre et de cardinal $2 = \dim(\ker(f))$ donc $(X, X^2 + 1)$ est une base de $\ker(f)$.

6 Montrer l'inclusion $\text{Im}(f) \subset G$ où $G = \{P \in E = \mathbb{R}_3[X] \mid P'(1) = P'(-1) = 0\}$.

On sait que $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)) = \text{Vect}(1, 0, -1, X^3 - 3X) = \text{Vect}(1, X^3 - 3X)$

Soit $P \in \text{Im}(f)$, alors $P = \lambda + \mu(X^3 - 3X)$ donc $P' = \mu(3X^2 - 3)$ donc $P'(1) = P'(-1) = 0$.

Donc $\text{Im}(f) \subset G$.

7 Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'application linéaire $\varphi_a : \begin{matrix} E \rightarrow \mathbb{R} \\ P \mapsto \varphi_a(P) = P'(a) \end{matrix}$ (on ne demande pas de prouver qu'elle est linéaire).

7a Montrer que φ_a est surjective.

φ_a est une forme linéaire non nulle (par exemple $\varphi_a(X) = 1$) Donc.....d'ailleurs $\varphi_a(\lambda X) = \lambda$ donc tout $\lambda \in \mathbb{R}$ a un antécédent donc φ est surjective.

7b En déduire la dimension de $\ker(\varphi_a)$.

Donc $\text{rg}(\varphi_a) = \dim(\mathbb{R}) = 1$ donc par la formule du rang, $\dim(\ker(\varphi_a)) = \dim(E) - 1 = 3$.

7c En déduire que G est un sous-espace vectoriel de E et quelle est sa dimension.

Remarquons que $G = \ker(\varphi_1) \cap \ker(\varphi_{-1})$ donc G est un sous-espace vectoriel de E et c'est l'intersection de deux hyperplans de E , qui sont distincts car par exemple, $(X-1)^2 \in \ker(\varphi_1)$ mais $(X-1)^2 \notin \ker(\varphi_{-1})$ donc d'après la question 1, $\dim(G) = \dim(E) - 2 = 2$.

8 Montrer que $\text{Im}(f) = G$.

$\text{Im}(f)$ est donc un sev de G , et ils ont même dimension, donc $\text{Im}(f) = G$. (on sait que $\dim(\text{Im}(f)) = 2$ soit par la formule du rang, soit parce qu'on a donné $\text{rg}(M)$ ou encore parce qu'on a donné une base de $\text{Im}(f)$, sans le dire tout-à-fait cependant).

9 Préciser une base de $\text{Im}(f)$.

Justement : $(1, X^3 - 3X)$ est une base de $\text{Im}(f)$ car libre, dans $\text{Im}(f)$ et de cardinal $2 = \dim(\text{Im}(f))$.

10 En déduire une matrice P inversible telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale. On demande d'explicitier P et $P^{-1}MP$, mais pas de calculer P^{-1} .

f est un projecteur donc $\text{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont supplémentaires donc $\mathcal{B} = (1, X^3 - 3X, X, X^2 + 1)$ est une base de E (base adaptée).

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. P est la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$. Par la formule de change-

ment de base $P^{-1}MP$ est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Mais f est un projecteur et les deux premiers polynômes de $\mathcal{B}$ sont dans $\text{Im}(f)$ donc invariants par f ($f(P) = P$) et les deux suivants sont dans le noyau. Donc :

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Corrigé de l'exercice 4 : Soit $n \geq 2$ et des réels $a_1, a_2, \dots, a_n$. On note $A_n = \begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{pmatrix}$

la matrice carrée de taille n dont les coefficients non diagonaux valent tous 1 et le i -ième coefficient diagonal vaut $1 + a_i$.

On note $d_n = \det(A_n)$.

1 Calculer d_2 et d_3 .

On a :

$$d_2 = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 \end{vmatrix} = (1+a_1)(1+a_2) - 1 = a_1a_2 + a_1 + a_2$$

et par la règle de Sarrus :

$$\begin{aligned} d_3 &= \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 \end{vmatrix} = (1+a_1)(1+a_2)(1+a_3) + 1 + 1 - (1+a_1) - (1+a_2) - (1+a_3) \\ &= a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3. \end{aligned}$$

2a Montrer que $d_n = \prod_{i=1}^{n-1} a_i + a_n \det \begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & & 1 & 1+a_{n-1} & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Par linéarité du déterminant par rapport à la dernière colonne, on a :

$$d_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & & 1 & 1+a_{n-1} & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 1+a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & & 1 & 1+a_{n-1} & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & & 1 & 1+a_{n-1} & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

En retranchant la dernière colonne à toutes les autres le premier déterminant vaut :

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & & 1 & 1+a_{n-1} & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & & 0 & a_{n-1} & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n-1} a_i$$

donc ;

$$d_n = \prod_{i=1}^{n-1} a_i + a_n \det \begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & & 1 & 1+a_{n-1} & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2b En déduire une relation entre d_n et d_{n-1} .

En développant le second déterminant par rapport à la dernière colonne, on obtient :

$$d_n = \prod_{i=1}^{n-1} a_i + a_n \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & & 1 & 1+a_{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n-1} a_i + a_n d_{n-1}$$

2c Donner une formule pour d_n en fonction uniquement de n et des réels $a_1, \dots, a_n$ et la démontrer par récurrence.

Montrons par récurrence sur $n \geq 2$ que $d_n = \prod_{i=1}^n a_i + \sum_{k=1}^n \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n a_i \right) :$

- I.: la formule est juste pour $n = 2$ ou 3 (voir 1).
- H.: soit $n \geq 3$ supposons $d_{n-1} = \prod_{i=1}^{n-1} a_i + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n-1} a_i \right)$. Alors :

$$\begin{aligned}
 d_n &= \prod_{i=1}^{n-1} a_i + a_n d_{n-1} = \prod_{i=1}^{n-1} a_i + a_n \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n-1} a_i \right) \right) \\
 &= \prod_{i=1}^{n-1} a_i + \prod_{i=1}^n a_i + a_n \sum_{k=1}^{n-1} \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n-1} a_i \right) \\
 &= \prod_{i=1}^{n-1} a_i + \prod_{i=1}^n a_i + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n a_i \right) \\
 &= \prod_{i=1}^n a_i + \sum_{k=1}^n \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n a_i \right).
 \end{aligned}$$

ce qui prouve la formule pour tout $n \geq 2$.

Corrigé de l'exercice 5 : Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $3n$, $n \in \mathbb{N}^*$, et f un endomorphisme de E , de rang $2n$.

1a Déterminer la dimension de $\ker(f)$.

D'après la formule du rang, $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \text{rg}(f)$ donc $\dim(\ker(f)) = 3n - 2n = n$.

1b Soit g la restriction de f au sous-espace vectoriel $\text{Im}(f)$, c'est-à-dire l'application :

$$g : \begin{array}{c} \text{Im}(f) \rightarrow E \\ \vec{x} \mapsto g(\vec{x}) = f(\vec{x}) \end{array}$$

Montrer $\text{Im}(g) = \text{Im}(f^2)$ et $\ker(g) = \ker(f) \cap \text{Im}(f)$.

En déduire $\text{rg}(f^2) \geq n$.

($\subset$) Soit $\vec{w} \in \text{Im}(g)$. Alors il existe $\vec{v} \in \text{Im}(f)$ tel que $\vec{w} = g(\vec{v}) = f(\vec{v})$ et aussi il existe $\vec{u} \in E$ tel que $\vec{v} = f(\vec{u})$. Ainsi, $\vec{w} = f(f(\vec{u})) = f^2(\vec{u})$ donc $\vec{w} \in \text{Im}(f^2)$. Donc $\text{Im}(g) \subset \text{Im}(f^2)$.

($\supset$) Soit $\vec{w} \in \text{Im}(f^2)$. Alors il existe $\vec{u} \in E$ tel que $\vec{w} = f^2(\vec{u})$. Donc $\vec{w} = f(\vec{v})$ avec $\vec{v} = f(\vec{u})$ donc $\vec{v} \in \text{Im}(f)$. Donc $\vec{w} = g(\vec{v})$. Donc $\vec{w} \in \text{Im}(g)$. Donc $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(g)$.

Donc $\text{Im}(g) = \text{Im}(f^2)$.

($\subset$) Soit $\vec{u} \in \ker(g)$. Alors $\vec{u} \in \text{Im}(f)$ et $g(\vec{u}) = \vec{0}$ donc $f(\vec{u}) = \vec{0}$ donc $\vec{u} \in \ker(f)$.

Donc $\vec{u} \in \ker(f) \cap \text{Im}(f)$ donc $\ker(g) \subset \ker(f) \cap \text{Im}(f)$.

($\supset$) Soit $\vec{u} \in \ker(f) \cap \text{Im}(f)$. Alors $g(\vec{u}) = f(\vec{u}) = \vec{0}$ donc $\vec{u} \in \ker(g)$.

Donc $\ker(f) \cap \text{Im}(f) \subset \ker(g)$.

Donc $\ker(g) = \ker(f) \cap \text{Im}(f)$.

D'après la formule du rang appliquée à g , on a :

$$\begin{aligned}
 \dim(\text{Im}(f)) &= \dim(\ker(g)) + \dim(\text{Im}(g)) \\
 &= \dim(\ker(f) \cap \text{Im}(f)) + \dim(\text{Im}(f^2))
 \end{aligned}$$

Or $\dim(\operatorname{Im}(f)) = rg(f) = 2n$ et $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) \subset \ker(f)$
donc $\dim(\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f)) \leq \dim(\ker(f)) = n$ donc :

$$\begin{aligned} rg(f^2) &= \dim(\operatorname{Im}(f^2)) = \dim(\operatorname{Im}(f)) - \dim(\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f)) \\ &\geq \dim(\operatorname{Im}(f)) - \dim(\ker(f)) = 2n - n = n. \end{aligned}$$

2 On suppose désormais en plus que $f^3 = 0$.

2a Déterminer la valeur de $rg(f^2)$.

Sachant $f^3 = 0$, c'est-à-dire $f \circ f^2 = 0$, on en déduit (classique, à détailler), $\operatorname{Im}(f^2) \subset \ker(f)$.

Donc $rg(f^2) = \dim(\operatorname{Im}(f^2)) \leq \dim(\ker(f)) = n$.

Compte tenu de 1b, cela donne $rg(f^2) = n$.

2b Soit S un supplémentaire de $\ker(f^2)$ dans E . Montrer que S est de dimension, n .

On a $S \oplus \ker(f^2) = E$ donc $\dim(S) = \dim(E) - \dim(\ker(f^2))$. D'après la formule du rang, cela donne :

$$\dim(S) = \dim(\operatorname{Im}(f^2)) = rg(f^2) = n.$$

On considère alors $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ une base de S .

2c Montrer que la famille $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n, f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n), f^2(\vec{e}_1), f^2(\vec{e}_2), \dots, f^2(\vec{e}_n))$ est une base de E .

Montrons que cette famille est libre. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_{3n} \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n + \lambda_{n+1} f(\vec{e}_1) + \dots + \lambda_{2n} f(\vec{e}_n) + \lambda_{2n+1} f^2(\vec{e}_1) + \dots + \lambda_{3n} f^2(\vec{e}_n) = \vec{0}.$$

Puisque $f^3 = 0$, en appliquant f^2 à cette relation, il vient :

$$f^2(\lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n) = \vec{0}$$

donc $\lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n \in S \cap \ker(f^2) = \{\vec{0}\}$ donc $\lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n = \vec{0}$. Or $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de S donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Donc il vient $\lambda_{n+1} f(\vec{e}_1) + \dots + \lambda_{2n} f(\vec{e}_n) + \lambda_{2n+1} f^2(\vec{e}_1) + \dots + \lambda_{3n} f^2(\vec{e}_n) = \vec{0}$.

On applique cette fois f et il reste $f(\lambda_{n+1} f(\vec{e}_1) + \dots + \lambda_{2n} f(\vec{e}_n)) = \vec{0}$

donc $f^2(\lambda_{n+1} \vec{e}_1 + \dots + \lambda_{2n} \vec{e}_n) = \vec{0}$ et de même, $\lambda_{n+1} \vec{e}_1 + \dots + \lambda_{2n} \vec{e}_n \in S \cap \ker(f^2) = \{\vec{0}\}$

donc $\lambda_{n+1} \vec{e}_1 + \dots + \lambda_{2n} \vec{e}_n = \vec{0}$. Or $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de S donc $\lambda_{n+1} = \dots = \lambda_{2n} = 0$.

Il reste enfin $\lambda_{2n+1} f^2(\vec{e}_1) + \dots + \lambda_{3n} f^2(\vec{e}_n) = \vec{0}$, c'est-à-dire $f^2(\lambda_{2n+1} \vec{e}_1 + \dots + \lambda_{3n} \vec{e}_n) = \vec{0}$

donc $\lambda_{2n+1} \vec{e}_1 + \dots + \lambda_{3n} \vec{e}_n \in S \cap \ker(f^2) = \{\vec{0}\}$ donc $\lambda_{2n+1} \vec{e}_1 + \dots + \lambda_{3n} \vec{e}_n = \vec{0}$ donc encore

$\lambda_{2n+1} = \dots = \lambda_{3n} = 0$.

Donc la famille $\mathcal{B}$ est libre. Or elle est de cardinale $3n$ dans E de dimension $3n$ donc c'est une base de E .

2d Ecrire $Mat_{\mathcal{B}}(f)$, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Cette matrice, carrée de taille $3n$, s'écrit bien par blocs de taille n (I_n désignant la matrice identité de taille n et 0_n la matrice nulle de taille n) :

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ I_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n \end{pmatrix}.$$

3 Exemple : soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer $rg(\varphi)$ avec aussi peu de calculs que possible.

Que vaut φ^3 ? Déterminer avec aussi peu de calculs que possible une base de $\mathbb{R}^3$ où la matrice

de φ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On a $rg(\varphi) \leq 2$ car les colonnes de M sont liées ($C_1 + C_2 + C_3 = 0$). De plus, deux colonnes de M sont non colinéaires (peu importe lesquelles) donc $rg(M) \geq 2$.

Donc $rg(M) = 2$ donc $rg(\varphi) = 2$.

On calcule :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 5 & -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 5 & -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$M^3 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 5 & -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\varphi^3 = 0$.

On est donc dans la situation des questions 1 et 2 avec $n = 1$. Pour trouver une base de $\mathbb{R}^3$

dans laquelle la matrice de φ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, il suffit d'après la question 2 de trouver S

supplémentaire de $\ker(\varphi^2)$ dans $\mathbb{R}^3$ puis d'utiliser 2c et 2d.

Soit $\vec{e}_1$ le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. D'après le calcul de M^2 , $\varphi^2(\vec{e}_1) = (-1, -1, -1)$. Donc $\vec{e}_1 \notin \ker(\varphi^2)$. D'après 2, tout supplémentaire de $\ker(\varphi^2)$ est de dimension 1 donc on peut prendre $S = Vect(\vec{e}_1)$.

D'après 2c et 2d, la famille $(\vec{e}_1, \varphi(\vec{e}_1), \varphi^2(\vec{e}_1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et la matrice de φ dans

cette base est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On peut préciser $\varphi(\vec{e}_1) = (4, 4, 5)$.