

D.S.8 samedi 9 Mai 2026 (2 heures)

Problème 1 : On considère la fonction f à valeurs réelles définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{x+t} dt.$$

On cherche à étudier quelques propriétés de la fonction f bien qu'on ne sache pas calculer explicitement cette intégrale. On observe qu'on ne sait pas non plus a priori si la fonction f est dérivable. On ne cherchera donc pas à la dériver.

1 Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ (en vérifiant que f satisfait la définition d'une fonction décroissante).

2 Soit x_0 un réel strictement positif quelconque.

2a Montrer que :

$$\forall x \in \left[\frac{x_0}{2}, +\infty \right[, |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2e|x - x_0|}{x_0^2}.$$

2b En déduire que f est continue au point x_0 .

3 Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \frac{e-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{e-1}{x}.$$

En déduire un équivalent de f en $+\infty$.

4a Déterminer un réel positif M tel que $\forall t \in [0, 1], |e^t - 1| \leq Mt$.

4b Soit la fonction $g : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, g(x) = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{x+t} dt$.

Montrer que g est bornée sur $\mathbb{R}^{+*}$.

4c En déduire finalement que $f(x) \sim_{x \rightarrow 0^+} -\ln(x)$.

5 Dans cette question, pour $x \in [1, +\infty[$ fixé, on cherche à calculer de manière approchée l'intégrale $f(x)$.

On observe que la fonction $t \mapsto \frac{e^t}{x+t}$ est une fonction continue et croissante sur $[0, 1]$ (on ne demande pas de la justifier). La méthode envisagée restant valide pour toute fonction réelle continue et croissante sur $[0, 1]$, on l'étudie dans le cas général.

On considère donc une fonction $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et croissante sur $[0, 1]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(h\left(\frac{k}{n}\right) + h\left(\frac{k+1}{n}\right) \right).$$

5a Justifier que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

On cherche par la suite à estimer l'erreur dans l'approximation de $\int_0^1 h(t) dt$ par un terme de la suite (u_n) .

5b Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $k \in [0, n-1]$:

$$\frac{1}{n} h\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} h(t) dt \leq \frac{1}{n} h\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

5c Dédurre de ce qui précède que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \int_0^1 h(t) dt - u_n \right| \leq \frac{h(1) - h(0)}{2n}.$$

Exercice 2 : séries de Cauchy, séries de Bertrand :

1 Soit $u_n = \frac{1}{n^a}$ pour $a > 0$. Enoncer et redémontrer le résultat du cours sur la convergence ou la divergence de la série $\sum u_n$ et montrer qu'en cas de convergence, la somme S de la série vérifie :

$$\frac{1}{a-1} \leq S \leq \frac{a}{a-1}$$

2 Soit $v_n = \frac{1}{n^a (\ln(n))^b}$ avec $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$.

2a On suppose $a > 1$. Montrer par comparaison avec une série de Riemann que la série $\sum v_n$ est convergente.

2b On suppose $a < 1$ et on pose $a' = \frac{1+a}{2}$. Etudier la suite $\frac{1}{n^{a'} v_n}$ et en déduire la nature de la série $\sum v_n$.

3 Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de termes réels positifs et décroissante. On pose $b_k = 2^k a_{2^k}$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^n b_k$.

3a Justifier que $S_{2^{n+1}-1} = \sum_{k=0}^n \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} a_j$.

3b Encadrer $\sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} a_j$ et en déduire que

$$S_{2^{n+1}-1} \leq T_n \text{ et } \frac{1}{2} (T_{n+1} - a_1) \leq S_{2^{n+1}-1}$$

3c En déduire que la suite (S_n) est majorée si et seulement si la suite (T_n) est majorée.

3d Montrer que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ ont même nature.

4 Soit $w_n = \frac{1}{n (\ln(n))^b}$ avec $b \in \mathbb{R}^{+*}$ et $z_n = 2^n w_{2^n}$.

4a Etudier la nature de la série $\sum z_n$.

4b En déduire la nature de la série $\sum w_n$.

Problème 1 : On considère la fonction f à valeurs réelles définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{x+t} dt.$$

On cherche à étudier quelques propriétés de la fonction f bien qu'on ne sache pas calculer explicitement cette intégrale. On observe qu'on ne sait pas non plus a priori si la fonction f est dérivable. On ne cherchera donc pas à la dériver.

1 Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ (en vérifiant que f satisfait la définition d'une fonction décroissante).

Soient $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$ avec $x \leq y$. Alors $\forall t \in [0, 1], 0 < x+t \leq y+t$ donc $\frac{1}{y+t} \leq \frac{1}{x+t}$ donc $\frac{e^t}{y+t} \leq \frac{e^t}{x+t}$ donc par intégration des inégalités, $f(y) \leq f(x)$. Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2 Soit x_0 un réel strictement positif quelconque.

2a Montrer que :

$$\forall x \in \left[\frac{x_0}{2}, +\infty \right[, |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2e|x-x_0|}{x_0^2}.$$

Soit $x \geq \frac{x_0}{2}$, on a :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= \left| \int_0^1 \frac{e^t}{x+t} dt - \int_0^1 \frac{e^t}{x_0+t} dt \right| = \left| \int_0^1 \left(\frac{e^t}{x+t} - \frac{e^t}{x_0+t} \right) dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 \left(\frac{(x_0-x)e^t}{(x+t)(x_0+t)} \right) dt \right| \leq \int_0^1 \frac{|x-x_0|e^t}{(x+t)(x_0+t)} dt \text{ par inégalité triangulaire} \end{aligned}$$

Or $\forall t \in [0, 1], 0 < x \leq x+t$ et $0 < x_0 \leq x_0+t$ donc $0 < \frac{1}{(x+t)(x_0+t)} \leq \frac{1}{xx_0} \leq \frac{2}{x_0^2}$ donc

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \int_0^1 2 \frac{|x-x_0|e^t}{x_0^2} dt = \frac{2|x-x_0|}{x_0^2} \int_0^1 e^t dt = \frac{2(e-1)|x-x_0|}{x_0^2} \leq \frac{2e|x-x_0|}{x_0^2}$$

2b En déduire que f est continue au point x_0 .

On a $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2e|x-x_0|}{x_0^2} = 0$ donc par encadrement, $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$ donc f est continue en x_0 .

3 Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \frac{e-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{e-1}{x}.$$

En déduire un équivalent de f en $+\infty$.

Soit $x > 0$. On a $\forall t \in [0, 1], 0 < x \leq x+t \leq x+1$ donc $\frac{e^t}{x+1} \leq \frac{e^t}{x+t} \leq \frac{e^t}{x}$ donc par intégration d'inégalités, $\frac{1}{x+1} \int_0^1 e^t dt \leq f(x) \leq \frac{1}{x} \int_0^1 e^t dt$,

i.e., $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \frac{e-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{e-1}{x}$.

Puisque $x+1 \sim_{+\infty} x$, on a par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = e-1$ donc $f(x) \sim_{+\infty} \frac{e-1}{x}$.

4a Déterminer un réel positif M tel que $\forall t \in [0, 1], |e^t - 1| \leq Mt$.

La fonction $\exp$ est dérivable sur $[0, 1]$ avec $\forall t \in [0, 1], |\exp'(t)| = e^t \leq e$ donc d'après l'inégalité des accroissements finis, $\forall t \in [0, 1], |e^t - e^0| \leq e|t|$, i.e., $|e^t - 1| \leq et$.

4b Soit la fonction $g : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, g(x) = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{x+t} dt$.

Montrer que g est bornée sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Soit $x > 0$, on a $|g(x)| \leq \int_0^1 \left| \frac{e^t - 1}{x+t} \right| dt \leq \int_0^1 \frac{et}{x+t} dt \leq \int_0^1 edt = e$ car $\forall t \in [0, 1], t \leq x+t$

donc $\frac{t}{x+t} \leq 1$.

Donc g est bornée sur $\mathbb{R}^{+*}$.

4c Montrer finalement que $f(x) \sim_{x \rightarrow 0^+} -\ln(x)$.

Soit $x > 0$. Calculons :

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \int_0^1 \frac{e^t}{x+t} dt - \int_0^1 \frac{e^t - 1}{x+t} dt = \int_0^1 \frac{1}{x+t} dt \\ &= [\ln(x+t)]_0^1 = \ln(x+1) - \ln(x). \end{aligned}$$

Donc :

$$f(x) = -\ln(x) + \ln(x+1) + g(x)$$

et :

$$\frac{f(x)}{-\ln(x)} = 1 - \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} - \frac{g(x)}{\ln(x)}$$

Or g est bornée donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} - \frac{g(x)}{\ln(x)} \right) = 0$ donc $f(x) \sim_{x \rightarrow 0^+} -\ln(x)$.

5 Dans cette question, pour $x \in [1, +\infty[$ fixé, on cherche à calculer de manière approchée l'intégrale $f(x)$.

On observe que la fonction $t \mapsto \frac{e^t}{x+t}$ est une fonction continue et croissante sur $[0, 1]$ (on ne demande pas de la justifier). La méthode envisagée restant valide pour toute fonction réelle continue et croissante sur $[0, 1]$, on l'étudie dans le cas général.

On considère donc une fonction $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et croissante sur $[0, 1]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(h\left(\frac{k}{n}\right) + h\left(\frac{k+1}{n}\right) \right).$$

5a Justifier que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

On cherche par la suite à estimer l'erreur dans l'approximation de $\int_0^1 h(t) dt$ par un terme de la

suite (u_n) .

On a :

$$u_n = \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k+1}{n}\right)}{2}$$

donc u_n est la moyenne (arithmétique) des deux sommes de Riemann de h (à droite et à gauche) sur $[0, 1]$. h étant continue, chacune tend vers $\int_0^1 h$ quand n tend vers $+\infty$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \int_0^1 h.$$

5b Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $k \in [0, n-1]$:

$$\frac{1}{n} h\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} h(t) dt \leq \frac{1}{n} h\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [0, n-1]$. On a $\forall t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, $h\left(\frac{k}{n}\right) \leq h(t) \leq h\left(\frac{k+1}{n}\right)$ car h est croissante donc par intégration des inégalités :

$$\frac{1}{n} h\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{k/n}^{(k+1)/n} h\left(\frac{k}{n}\right) dt \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} h(t) dt \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} h\left(\frac{k+1}{n}\right) dt = \frac{1}{n} h\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

5c Dédurre de ce qui précède que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \int_0^1 h(t) dt - u_n \right| \leq \frac{h(1) - h(0)}{2n}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 h(t) dt - u_n \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} h(t) dt - \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(h\left(\frac{k}{n}\right) + h\left(\frac{k+1}{n}\right) \right) \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{k/n}^{(k+1)/n} h(t) dt - \frac{1}{2n} \left(h\left(\frac{k}{n}\right) + h\left(\frac{k+1}{n}\right) \right) \right) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} h(t) dt - \frac{1}{2n} \left(h\left(\frac{k}{n}\right) + h\left(\frac{k+1}{n}\right) \right) \right| \end{aligned}$$

Or $\frac{1}{2n} \left(h\left(\frac{k}{n}\right) + h\left(\frac{k+1}{n}\right) \right)$ est le milieu de l'intervalle $\left[\frac{1}{n} h\left(\frac{k}{n}\right), \frac{1}{n} h\left(\frac{k+1}{n}\right) \right]$ et $\int_{k/n}^{(k+1)/n} h(t) dt$ est dans cet intervalle donc :

$$\left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} h(t) dt - \frac{1}{2n} \left(h\left(\frac{k}{n}\right) + h\left(\frac{k+1}{n}\right) \right) \right| \leq \frac{1}{2n} \left(h\left(\frac{k+1}{n}\right) - h\left(\frac{k}{n}\right) \right)$$

donc en sommant, on télescope :

$$\left| \int_0^1 h(t) dt - u_n \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n} \left(h\left(\frac{k+1}{n}\right) - h\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \frac{1}{2n} (h(1) - h(0))$$

Corrigé exercice 2 : séries de Cauchy, séries de Bertrand :

- 1 Soit $u_n = \frac{1}{n^a}$ pour $a > 0$. Enoncer et redémontrer le résultat du cours sur la convergence ou la divergence de la série $\sum u_n$ et montrer qu'en cas de convergence, la somme S de la série vérifie :

$$\frac{1}{a-1} \leq S \leq \frac{a}{a-1}$$

La série $\sum \frac{1}{n^a}$ converge si et seulement si $a > 1$. Montrons-le par comparaison série-intégrale :

posons $f(x) = \frac{1}{x^a}$. f est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ car $a > 0$ donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\forall t \in [k, k+1], f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$$

donc par intégration des inégalités :

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} f(k+1) dt &\leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \int_k^{k+1} f(k) dt \\ f(k+1) &\leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \end{aligned}$$

On somme ces inégalités de $k = 1$ à $n \in \mathbb{N}^*$ et on utilise la relation de Chasles :

$$\sum_{k=1}^n f(k+1) \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{t^a} dt \leq \sum_{k=1}^n f(k)$$

Supposons d'abord $a \neq 1$. Notons $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a}$ la somme partielle de la série $\sum u_n$. On a alors :

$$S_{n+1} - 1 \leq \left[\frac{t^{-a+1}}{1-a} \right]_1^{n+1} = \frac{1}{1-a} ((n+1)^{1-a} - 1) \leq S_n$$

Si $a < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)^{1-a} = +\infty$ donc l'inégalité de droite montre par comparaison que

$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$ donc la série $\sum u_n$ diverge.

Dans le cas $a = 1$, on obtient $S_n \geq \ln(n+1)$ donc la série $\sum u_n$ diverge.

Si $a > 1$, on a pour $n \geq 2$:

$$\frac{1}{a-1} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^{a-1}} \right) \leq S_n \leq 1 + \frac{1}{a-1} \left(1 - \frac{1}{n^{a-1}} \right) \leq 1 + \frac{1}{a-1}$$

donc (S_n) est majorée. Or (S_n) est croissante donc la série $\sum u_n$ est convergente.

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)^{a-1}} = 0$ donc par passage à la limite, l'encadrement ci-dessus donne :

$$\frac{1}{a-1} \leq S \leq 1 + \frac{1}{a-1} = \frac{a}{a-1}$$

- 2 Soit $v_n = \frac{1}{n^a (\ln(n))^b}$ avec $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$.

2a On suppose $a > 1$. Montrer par comparaison avec une série de Riemann que la série $\sum v_n$ est convergente.

$$v_n = o_{+\infty} \left(\frac{1}{n^a} \right) \text{ car } \frac{v_n}{1/n^a} = \frac{1}{(\ln(n))^b} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc :}$$

$$\left. \begin{array}{l} \cdot v_n = o_{+\infty} \left(\frac{1}{n^a} \right) \\ \cdot \sum v_n \text{ et } \sum \frac{1}{n^a} \text{ sont des SATP} \\ \cdot \sum \frac{1}{n^a} \text{ est une série de Riemann convergente} \end{array} \right\} \text{ donc } \sum v_n \text{ est une série convergente}$$

2b On suppose $a < 1$ et on pose $a' = \frac{1+a}{2}$. Etudier la suite $\frac{1}{n^{a'} v_n}$ et en déduire la nature de la série $\sum v_n$.

$$\frac{1}{n^{a'} v_n} = \frac{n^a (\ln(n))^b}{n^{a'}} = \frac{(\ln(n))^b}{n^{(1-a)/2}} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ par croissance comparée car } 1-a > 0 \text{ donc :}$$

$$\left. \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{n^{a'}} = o_{+\infty}(v_n) \\ \cdot \sum v_n \text{ et } \sum \frac{1}{n^{a'}} \text{ sont des SATP} \\ \cdot \sum \frac{1}{n^{a'}} \text{ est une série de Riemann divergente car } a' < 1 \end{array} \right\} \text{ donc } \sum v_n \text{ est une série divergente.}$$

3 Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de termes réels positifs et décroissante. On pose $b_k = 2^k a_{2^k}$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^n b_k$.

3a Justifier que $S_{2^{n+1}-1} = \sum_{k=0}^n \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} a_j$.

On a par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} S_{2^{n+1}-1} &= \sum_{j=1}^{2^{n+1}-1} a_j = \sum_{j=2^0}^{2^{n+1}-1} a_j = \sum_{j=2^0}^{2^1-1} a_j + \sum_{j=2^1}^{2^2-1} a_j + \cdots + \sum_{j=2^n}^{2^{n+1}-1} a_j \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} a_j \end{aligned}$$

3b Encadrer $\sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} a_j$ et en déduire que

$$S_{2^{n+1}-1} \leq T_n \text{ et } \frac{1}{2} (T_{n+1} - a_1) \leq S_{2^{n+1}-1}$$

La suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est décroissante donc pour tout $j \in [2^k, 2^{k+1} - 1]$, $a_{2^{k+1}} \leq a_{2^{k+1}-1} \leq a_j \leq a_{2^k}$ donc par somme d'inégalités :

$$\sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} a_{2^{k+1}} \leq \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} a_j \leq \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} a_{2^k}$$

soit

$$(2^{k+1} - 1 - 2^k + 1) a_{2^{k+1}} \leq \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} a_j \leq (2^{k+1} - 1 - 2^k + 1) a_{2^k}$$

donc

$$2^k a_{2^{k+1}} \leq \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} a_j \leq 2^k a_{2^k}$$

En sommant encore cette inégalité, on a :

$$S_{2^{n+1}-1} = \sum_{k=0}^n \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} a_j \leq \sum_{k=0}^n 2^k a_{2^k} = \sum_{k=0}^n b_k = T_n$$

soit $S_{2^{n+1}-1} \leq T_n$

et en sommant de l'autre côté :

$$\sum_{k=0}^n 2^k a_{2^{k+1}} \leq \sum_{k=0}^n \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} a_j = S_{2^{n+1}-1}$$

soit

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^n b_{k+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n 2^{k+1} a_{2^{k+1}} \leq S_{2^{n+1}-1}$$

ou encore

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} b_k = \frac{1}{2} (T_{n+1} - b_0) \leq S_{2^{n+1}-1}$$

soit $\frac{1}{2} (T_{n+1} - a_1) \leq S_{2^{n+1}-1}$.

Ainsi :

$$\frac{1}{2} (T_{n+1} - a_1) \leq S_{2^{n+1}-1} \leq T_n$$

3c En déduire que la suite (S_n) est majorée si et seulement si la suite (T_n) est majorée.

($\Rightarrow$) Si la suite (S_n) est majorée, alors il existe M (indépendant de n) tel que pour tout entier n , $S_n \leq M$ alors pour tout entier n , $S_{2^{n+1}-1} \leq M$ donc $T_{n+1} \leq a_1 + 2M$ donc la suite (T_n) est majorée.

($\Leftarrow$) Si la suite (T_n) est majorée, alors il existe M' (indépendant de n) tel que pour tout entier n , $T_n \leq M'$ donc $S_{2^{n+1}-1} \leq M'$. Or (a_n) est une suite de termes positifs et $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ donc

$S_n \leq \sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} a_k$ car $n \leq 2^{n+1} - 1$ donc $S_n \leq M'$ donc (S_n) est majorée.

3d Montrer que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ ont même nature.

Ce sont toutes les deux des SATP donc elles sont convergentes si et seulement si les suites de leurs sommes partielles sont majorées. Ces suites sont (S_n) et (T_n) , or (S_n) est majorée ssi (T_n) est majorée donc la série $\sum a_n$ converge ssi la série $\sum b_n$ converge et elles ont donc même nature.

4 Soit $w_n = \frac{1}{n (\ln(n))^b}$ avec $b \in \mathbb{R}^{+*}$ et $z_n = 2^n w_{2^n}$.

4a Etudier la nature de la série $\sum z_n$.

On a $z_n = 2^n \frac{1}{(\ln(2^n))^b} = \frac{1}{(\ln(2^n))^b} = \frac{1}{(\ln(2))^b n^b}$ donc cette série $\sum z_n$ est une série de Riemann et converge si et seulement si $b > 1$.

4b En déduire la nature de la série $\sum w_n$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t(\ln(t))^b}$ est décroissante sur $]1 + \infty[$ soit par calcul de dérivée, soit par inverse d'une fonction croissante comme produit de fonctions croissantes ET POSITIVES. Donc (w_n) est une suite de termes réels positifs et décroissante. Donc les séries $\sum w_n$ et $\sum z_n$ ont même nature donc la série $\sum w_n$ converge si et seulement si $b > 1$.