

D.S.10 2025

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n . On pose :

$$\forall (P, Q) \in E^2, (P | Q) = \int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt$$

Soit $\Delta : E \rightarrow E$ définie par :

$$\forall P \in E, \Delta(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP'$$

1 Vérifier que l'application $(. | .)$ définit un produit scalaire sur E .

2a Vérifier que Δ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E .

2b Ecrire la matrice de Δ relativement à la base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n)$.

En déduire $rg(\Delta)$.

Δ est-il un automorphisme de E ?

Pour tout $k \in [0, n]$, on pose $\lambda_k = k(k+1)$.

2c Soit $k \in [0, n]$.

Montrer que l'endomorphisme $\Delta - \lambda_k Id_E$ est non injectif.

En déduire l'existence d'un polynome P_k de E tel que :

- P_k est de degré k .
- le coefficient dominant de P_k vaut 1.
- $\Delta(P_k) = \lambda_k P_k$.

2d Montrer que pour tous $P, Q \in E$, on a : $(\Delta(P) | Q) = (P | \Delta(Q))$.

Indication : on pourra procéder par intégration par parties.

2e En déduire que pour tous $(k, h) \in [0, n]^2$ tels que $k \neq h$, on a $(P_k | P_h) = 0$.

2f Montrer qu'on peut choisir une base de E dans laquelle la matrice de Δ est diagonale.

Exercice 2 : calcul d'une somme de série. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} u_n.$$

1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2 Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note l sa limite (qui n'est pas à calculer pour l'instant).

3 Montrer que la série $\sum (\ln(u_n) - \ln(u_{n+1}))$ est divergente.

4 En déduire que $l = 0$.

5 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \frac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n}$.

5a Montrer que :

$$\ln(v_n) = \left(\alpha - \frac{3}{2}\right) \frac{1}{n} + \left(\frac{21}{8} - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{1}{n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)$$

5b En déduire α pour que la série à terme général $\ln(v_n)$ converge (montrer que la condition sur α est nécessaire et suffisante).

6 On suppose que α prend la valeur trouvée à la question précédente et on pose $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(v_n)$.

6a Montrer que la suite $(\ln(n^{3/2}u_n))$ converge vers $S + \ln\left(\frac{2}{5}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire alors que :

$$u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2e^S}{5n^{3/2}}$$

puis déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

6b En partant de $2ku_k = (2k+2)u_k - 2u_k$, vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$2 \sum_{k=1}^{n+1} ku_k = 2 \sum_{k=2}^{n+2} ku_k + 3 \sum_{k=2}^{n+2} u_k - 2 \sum_{k=1}^{n+1} u_k$$

6c On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

En utilisant la relation précédente, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n = 3 - 3u_{n+1} - 2(n+1)u_{n+1}$ et en

déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Problème 1 : Optimisation du choix d'une place de parking

Présentation générale : On considère une rue infiniment longue et rectiligne. On souhaite aller à un numéro précis de cette rue.

Devant chaque numéro se trouve une place de parking. On cherche à savoir à partir de quel moment on doit commencer à s'intéresser aux places disponibles pour pouvoir se garer au plus près de l'arrivée.

Au départ, nous sommes au début de la rue. Par convention, nous poserons que le début de la rue a pour numéro 0. Devant chaque numéro n ($n \in \mathbb{N}$), il y a une place de parking qui peut être libre avec une probabilité $p \in]0, 1[$. On suppose que p ne dépend pas de n et que les occupations de places sont indépendantes les unes par rapport aux autres.

Notre stratégie est la suivante : on se donne s un entier naturel. On roule sans interruption jusqu'au numéro s de la rue et on choisit la première place disponible à partir du numéro s (inclus).

On note X le numéro de la place libre trouvée par cette méthode.

On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, A_k : « la k -ième place est libre ».

Ainsi, l'expérience est modélisée par un univers Ω muni d'une probabilité P tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(A_k) = p$.

Partie 1 : dérivées de la série géométrique.

- 1 Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la série $\sum nx^{n-1}$ converge si et seulement si $x \in]-1, 1[$.
- 2 Vérifier que pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.
- 3 Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la série $\sum n(n-1)x^{n-2}$ converge si et seulement si $x \in]-1, 1[$.
- 4 Vérifier que pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$.

Partie 2 : loi de X .

- 5 Vérifier que pour tout entier $n \geq s$, $P(X = n) = (1-p)^{n-s}p$.
- 6 Montrer que la série $\sum nP(X = n)$ converge.
On pose alors $E(X) = \sum_{n=s}^{+\infty} nP(X = n)$. Calculer $E(X)$ en fonction de s et de p .
- 7 Montrer que la série $\sum n^2P(X = n)$ converge.
On pose alors $E(X^2) = \sum_{n=s}^{+\infty} n^2P(X = n)$ et $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$. Calculer $V(X)$ en fonction de p (on constatera que $V(X)$ ne dépend pas de s).

Partie 3 : calcul de la distance moyenne à l'arrivée. On souhaite aller au numéro d de cette rue avec $d \in \mathbb{N}^*$. Notre stratégie reviendra à choisir un numéro s compris entre 0 et d . Pour rappel, $s = 0$ correspond à chercher une place dès le début de la rue.

On admettra que la distance moyenne à l'arrivée est $D_s = \sum_{n=s}^{+\infty} |n-d|P(X = n)$

- 8 Montrer que D_s existe.

Pour simplifier, on prend $p = \frac{1}{10}$ dans la suite de cette partie.

9 Etablir que $D_s = S_1 + S_2$ avec $S_1 = \sum_{n=s}^d (d-n) P(X=n)$ et $S_2 = \sum_{n=d+1}^{+\infty} (n-d) P(X=n)$.

10 Soit la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall k \geq 0, u_k = \sum_{i=0}^k (k-i) \left(\frac{9}{10}\right)^i$.

Montrer que $\forall k \geq 0, u_{k+1} = \frac{9}{10}u_k + k + 1$.

11 On pose $v_k = u_k + ak$, où a est un réel. Choisir la valeur de a de sorte que la suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ soit d'un type connu. En déduire l'expression de v_k puis de u_k en fonction de k .

12 Exprimer S_1 à l'aide de u_{d-s} puis donner l'expression de S_1 en fonction de d et s .

13 Justifier que $S_2 - S_1 = \sum_{n=s}^{+\infty} (n-d) P(X=n)$. En déduire la valeur de S_2 , puis D_s .

Partie 4 : optimisation. On admet que pour tout $p \in]0, 1[$, $D_s = d - s + 1 - \frac{1}{p} + \frac{2}{p} (1-p)^{d-s+1}$.

14 Simplifier $D_{s+1} - D_s$.

15 Etudier le signe de $D_{s+1} - D_s$.

En déduire que D_s est minimale pour s le plus petit entier strictement supérieur à α avec

$$\alpha = d + \frac{\ln(2)}{\ln(1-p)}.$$

16 Dans cette question, on s'intéresse à l'exemple pour lequel $p = \frac{1}{10}$. En utilisant l'encadrement $2^{-1/6} < 0.9 < 2^{-1/7}$, à quelle distance de l'arrivée doit-on commencer à chercher une place.?