

Programme de colles, semaines 1-2:

Contenu:

Chapitre 1 : Elements de logique et de raisonnement : assertions, négation d'une conjonction, négation d'une disjonction, négation d'un quantificateur, existentiel ou universel. Récurrences simples, doubles, fortes.

Attention : je n'ai pas traité de l'implication en détail. Je n'ai pas traité non plus les raisonnements par analyse-synthèse.

Chapitre 2 : Inégalités, valeurs absolues, calculs de sommes et de produits, sommes doubles et triangulaires; petits systèmes linéaires et interprétation géométrique.

Questions de cours :

Chapitre 1 : logique, modes de raisonnement - Appliquer sur un exemple concret les règles de négation des prédicats (avec "et", "ou", " $\forall$ " et " $\exists$ ").

- Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Enoncer avec quantificateurs " f admet un minimum", puis sa négation (exo 11 du cours).

- Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Enoncer avec quantificateurs " f est majorée", puis sa négation (exo 14 du cours).

- Exercice 15 : Montrer que $\forall n \geq 4, n^2 \leq 2^n$.

- Exercice 16 : Soit (u_n) définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$. Il s'agit de la suite de Fibonacci. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \left(\frac{5}{3}\right)^n$.

Chapitre 2 : calculs algébriques - Enoncés des règles sur les inégalités (proposition 4 du cours). Quelles opérations sont interdites ? (citez deux opérations!)

- Définition de la valeur absolue.

- Inégalités triangulaires, forme générale (majoration et minoration de $|x + y|$ et de $|x - y|$), avec démonstration.

- On suppose $2 \leq |a| \leq 4$ et $5 \leq |b| \leq 6$. Encadrer $|a - 2b|$ puis $\frac{a^2 |b + 1|}{|a - 2b|}$.

- Résoudre l'inéquation $|x^2 - 2x - 4| \leq 1$.

- définition d'une partie majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$.

- définition du maximum (ou plus grand élément) d'une partie de $\mathbb{R}$.

- Compléter :

$$\sum_{k \in I} (a_k + b_k) = \quad \text{et} \quad \prod_{k \in I} (a_k b_k) =$$

$$\sum_{k=1}^n \lambda a_k = \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n (\lambda a_k) =$$

$$\prod_{k \in I} (a_k)^s = \quad (s \in \mathbb{N})$$

$$\sum_{k=1}^n (a_k + \lambda) =$$

Relation de Chasles : si l'on a $p \leq r \leq q$, alors :

$$\sum_{k=p}^q a_k = \sum_{k=p}^r a_k +$$

- somme des entiers de 1 à n , avec démonstration.
- somme des termes consécutifs d'une suite géométrique, avec démonstration.
- factorisation de $a^n - b^n$ avec démonstration.

- Calculer $S = \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+2)}$.

- Simplifier $S = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$.

- définition de $\binom{n}{p}$ et **formule** du triangle de Pascal, énoncé et démonstration.

- Formule du binôme de Newton (énoncé).

- Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ puis montrer que $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$. En déduire $\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k}$

et $\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k}$.

- Calculer $S = \sum_{i=1}^n i2^i$, indication : $S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i 2^i$

- On considère le système $(S) : \begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$. Expliquer sans calculs pourquoi on peut trouver $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ et $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que l'ensemble des solutions soit

$$S : \{(x_0 + \lambda\alpha, y_0 + \lambda\beta, z_0 + \lambda\gamma) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- Résoudre le système (S) ci-dessus.
- Résoudre le système (S) et interpréter géométriquement les résultats en fonction du paramètre a :

$$(S) : \begin{cases} (a+1)x + 2y - 4z = 2 \\ -x + (a-2)y + 2z = -1 \\ x + y + (a-3)z = 1 \end{cases}$$

- Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $0 \leq a < b$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que:

$$na^{n-1}(b-a) \leq b^n - a^n \leq nb^{n-1}(b-a).$$

- Factoriser $S_n = 1 - 2x + 4x^2 + \dots + (-1)^n 2^n x^n$.