

D.M.1 pour le 28 Septembre 2026

Exercice 1 : On fixe des réels $a_1, a_2, \dots, a_n$ et on considère pour $n \geq 1$ la somme $S_n = \sum e^{i(\pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n)}$ où la somme est étendue à toutes les possibilités de signes $+$ ou $-$ devant chacun des a_i .

Par exemple :

$$\begin{aligned} S_1 &= e^{ia_1} + e^{-ia_1} \\ S_2 &= e^{i(a_1+a_2)} + e^{i(a_1-a_2)} + e^{i(-a_1+a_2)} + e^{i(-a_1-a_2)} \end{aligned}$$

- 1 Expliquez de la même façon S_3 .
- 2 Combien de termes contient la somme S_n ?
- 3 Montrer que pour $n \geq 1$, $S_n = \lambda_n S_{n-1}$ pour un coefficient λ_n que l'on explicitera en fonction de a_n .
- 4a La suite (S_n) est-elle géométrique ? Pourquoi ?
- 4b Exprimer S_n en fonction de $n, a_1, a_2, \dots, a_n$ (on donnera une relation qu'on démontrera par récurrence).
- 4c En déduire $\sum \cos(\pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n)$ et $\sum \sin(\pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n)$ où les sommes sont encore étendues à toutes les possibilités de signes $+$ ou $-$ devant chacun des a_i .
- 5 Dans cette question, on fixe $a \in]0, 2\pi[$ et on choisit $a_k = \frac{a}{2^k}$ pour tout $k \geq 1$. Simplifier dans ce cas $\sum \cos(\pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n)$.

Exercice 2 : On se propose d'étudier la suite (z_n) de nombres complexes définie par son premier terme $z_0 \in \mathbb{C}$ et par la relation:

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1}{2} (z_n + |z_n|).$$

- 1 Question préliminaire: on pose lorsque $\sin(x) \neq 0$: $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.
Montrer que $f(x) = x \cot(x)$ admet quand x tend vers 0 une limite que l'on déterminera.
- 2 Dans cette question, on suppose que $z_0 \in \mathbb{R}$. Déterminer alors z_n pour tout $n \geq 1$.
- 3 Dans la suite, on suppose que z_0 n'est pas réel et on l'écrit sous forme trigonométrique: $z_0 = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho = |z_0|$ et $\theta \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$.
- 3a Déterminer la forme trigonométrique de z_1
- 3b Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$z_n = \rho e^{i\theta/2^n} \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right).$$

3c Montrer à présent que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$z_n = \frac{\rho}{2^n} \frac{\sin(\theta)}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} e^{i\theta/2^n}.$$

3d On note maintenant x_n la partie réelle de z_n et y_n la partie imaginaire de z_n . Exprimer x_n et y_n en fonction de ρ, θ et n et déterminer leur limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3 : On note $z = e^{2i\pi/7}$ une racine septième de l'unité.

On pose $s = z + z^2 + z^4$ et $t = z^3 + z^5 + z^6$.

1 Calculer $s + t$ et st .

2 En déduire les valeurs de s et t .