

D.M.1 pour le 28 Septembre 2026

Exercice 1 : On fixe des réels $a_1, a_2, \dots, a_n$ et on considère pour $n \geq 1$ la somme $S_n = \sum e^{i(\pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n)}$ où la somme est étendue à toutes les possibilités de signes $+$ ou $-$ devant chacun des a_i .

Par exemple :

$$\begin{aligned} S_1 &= e^{ia_1} + e^{-ia_1} \\ S_2 &= e^{i(a_1+a_2)} + e^{i(a_1-a_2)} + e^{i(-a_1+a_2)} + e^{i(-a_1-a_2)} \end{aligned}$$

- 1 Expliquez de la même façon S_3 .
- 2 Combien de termes contient la somme S_n ?
- 3 Montrer que pour $n \geq 1$, $S_n = \lambda_n S_{n-1}$ pour un coefficient λ_n que l'on explicitera en fonction de a_n .
- 4a La suite (S_n) est-elle géométrique ? Pourquoi ?
- 4b Exprimer S_n en fonction de $n, a_1, a_2, \dots, a_n$ (on donnera une relation qu'on démontrera par récurrence).
- 4c En déduire $\sum \cos(\pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n)$ et $\sum \sin(\pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n)$ où les sommes sont encore étendues à toutes les possibilités de signes $+$ ou $-$ devant chacun des a_i .
- 5 Dans cette question, on fixe $a \in]0, 2\pi[$ et on choisit $a_k = \frac{a}{2^k}$ pour tout $k \geq 1$. Simplifier dans ce cas $\sum \cos(\pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n)$.

Exercice 2 : On se propose d'étudier la suite (z_n) de nombres complexes définie par son premier terme $z_0 \in \mathbb{C}$ et par la relation:

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1}{2} (z_n + |z_n|).$$

- 1 Question préliminaire: on pose lorsque $\sin(x) \neq 0$: $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.
Montrer que $f(x) = x \cot(x)$ admet quand x tend vers 0 une limite que l'on déterminera.
- 2 Dans cette question, on suppose que $z_0 \in \mathbb{R}$. Déterminer alors z_n pour tout $n \geq 1$.
- 3 Dans la suite, on suppose que z_0 n'est pas réel et on l'écrit sous forme trigonométrique: $z_0 = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho = |z_0|$ et $\theta \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$.
- 3a Déterminer la forme trigonométrique de z_1
- 3b Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$z_n = \rho e^{i\theta/2^n} \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right).$$

3c Montrer à présent que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$z_n = \frac{\rho}{2^n} \frac{\sin(\theta)}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} e^{i\theta/2^n}.$$

3d On note maintenant x_n la partie réelle de z_n et y_n la partie imaginaire de z_n . Exprimer x_n et y_n en fonction de ρ, θ et n et déterminer leur limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3 : On note $z = e^{2i\pi/7}$ une racine septième de l'unité.

On pose $s = z + z^2 + z^4$ et $t = z^3 + z^5 + z^6$.

1 Calculer $s + t$ et st .

2 En déduire les valeurs de s et t .

Corrigé exercice 1 : On fixe des réels $a_1, a_2, \dots, a_n$ et on considère la somme $S_n = \sum e^{i(\pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n)}$ où la somme est étendue à toutes les possibilités de signes $+$ ou $-$ devant chacun des a_i .

Par exemple :

$$\begin{aligned} S_1 &= e^{ia_1} + e^{-ia_1} \\ S_2 &= e^{i(a_1+a_2)} + e^{i(a_1-a_2)} + e^{i(-a_1+a_2)} + e^{i(-a_1-a_2)} \end{aligned}$$

1 Explicitez de la même façon S_3 .

On a :

$$S_3 = e^{i(a_1+a_2+a_3)} + e^{i(a_1+a_2-a_3)} + e^{i(a_1-a_2+a_3)} + e^{i(a_1-a_2-a_3)} + e^{i(-a_1+a_2+a_3)} + e^{i(-a_1+a_2-a_3)} + e^{i(-a_1-a_2+a_3)} + e^{i(-a_1-a_2-a_3)}$$

2 Combien de termes contient la somme S_n ?

Il y a deux choix de signes possibles pour chacun des a_i , et cela se produit n fois, donc au total, 2^n choix et autant de termes dans la somme S_n .

3 Montrer que pour $n \geq 1$, $S_n = \lambda_n S_{n-1}$ pour un coefficient λ_n que l'on explicitera en fonction de a_n .

Dans les calculs suivants, les sommes sont étendues à tous les choix de possibles dans les expressions considérées :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum e^{i(\pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n)} = \sum e^{i(\pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_{n-1})} e^{\pm ia_n} \\ &= \sum e^{i(\pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_{n-1})} e^{ia_n} + \sum e^{i(\pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_{n-1})} e^{-ia_n} \\ &= \left(\sum e^{i(\pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_{n-1})} \right) (e^{ia_n} + e^{-ia_n}) = 2 \cos(a_n) \sum e^{i(\pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_{n-1})} = 2 \cos(a_n) S_{n-1} \end{aligned}$$

d'où $\lambda_n = 2 \cos(a_n)$.

4a La suite (S_n) est-elle géométrique ? Pourquoi ?

Non, car ce coefficient λ_n n'est pas indépendant de n .

4b Exprimer S_n en fonction de $n, a_1, a_2, \dots, a_n$ (on donnera une relation qu'on démontrera par récurrence).

On montre par récurrence (facile) sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $S_n = 2^n \prod_{k=1}^n \cos(a_k)$:

- Initialisation : $n = 1$, $S_1 = e^{ia_1} + e^{-ia_1} = 2 \cos(a_1) = 2^1 \prod_{k=1}^1 \cos(a_k)$.

- Hérédité : soit $n \geq 1$. Supposons $S_n = 2^n \prod_{k=1}^n \cos(a_k)$.

$$\text{Alors } S_{n+1} = 2 \cos(a_{n+1}) S_n \underset{\text{H.R.}}{=} 2 \cos(a_{n+1}) 2^n \prod_{k=1}^n \cos(a_k) = 2^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} \cos(a_k).$$

- Conclusion : pour tout $n \geq 1$, $S_n = 2^n \prod_{k=1}^n \cos(a_k)$.

4c En déduire $\sum \cos(\pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n)$ et $\sum \sin(\pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n)$ où les sommes sont encore étendues à toutes les possibilités de signes + ou - devant chacun des a_i .

Remarquons que :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum e^{i(\pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n)} = \sum (\cos(\pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n) + i \sin(\pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n)) \\ &= \sum \cos(\pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n) + i \sum \sin(\pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n) \end{aligned}$$

donc $\sum \cos(\pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n) = \operatorname{Re}(S_n)$ et $\sum \sin(\pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n) = \operatorname{Im}(S_n)$, or $S_n = 2^n \prod_{k=1}^n \cos(a_k) \in \mathbb{R}$, donc :

$$\sum \cos(\pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n) = 2^n \prod_{k=1}^n \cos(a_k) \text{ et } \sum \sin(\pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n) = 0$$

5 Dans cette question, on fixe $a \in]0, 2\pi[$ et on choisit $a_k = \frac{a}{2^k}$ pour tout $k \geq 1$. Simplifier dans ce cas $\sum \cos(\pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n)$ (on pourra penser à $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$).
On a à présent :

$$\sum \cos(\pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n) = 2^n \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{a}{2^k}\right) = 2^n \prod_{k=1}^n \frac{\sin\left(2\frac{a}{2^k}\right)}{2 \sin\left(\frac{a}{2^k}\right)} \text{ car } \sin\left(\frac{a}{2^k}\right) \neq 0 \text{ car } \frac{a}{2^k} \in]0, \pi[$$

donc :

$$\begin{aligned} \sum \cos(\pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n) &= \prod_{k=1}^n \frac{\sin\left(\frac{a}{2^{k-1}}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2^k}\right)} = \frac{\sin(a)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)} \times \frac{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2^2}\right)} \times \dots \times \frac{\sin\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)} \\ &= \frac{\sin(a)}{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)} \text{ par produit télescopique.} \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 2 : On se propose d'étudier la suite (z_n) de nombres complexes définie par son premier terme $z_0 \in \mathbb{C}$ et par la relation:

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1}{2} (z_n + |z_n|).$$

1.) Question préliminaire: on pose lorsque $\sin(x) \neq 0$: $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

Montrer que $f(x) = x \cot(x)$ admet quand x tend vers 0 une limite que l'on déterminera.

On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

2.) Dans cette question, on suppose que $z_0 \in \mathbb{R}$. Déterminer alors z_n pour tout $n \geq 1$.

Dans cette question, on suppose que $z_0 \in \mathbb{R}$.

1er cas: $z_0 \in \mathbb{R}^+$, alors $z_0 = |z_0|$ donc $z_1 = z_0$, et par une récurrence immédiate, on obtient pour tout entier n , $z_n = z_0$. La suite est alors constante.

2ème cas: $z_0 \in \mathbb{R}^-$, alors $z_0 = -|z_0|$ donc $z_1 = 0$ et par une récurrence immédiate, on obtient pour tout entier $n \geq 1$, $z_n = 0$.

REMARQUE: on ne peut pas discuter suivant le signe de z_n (plutôt que de z_0) car celui-ci dépend *a priori* de n , il faudrait donc faire une infinité de cas (et non DEUX cas)

3.) Dans la suite, on suppose que z_0 n'est pas réel et on l'écrit sous forme trigonométrique: $z_0 = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho = |z_0|$ et $\theta \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$.

3.a.) Déterminer la forme trigonométrique de z_1 .

$$z_1 = \frac{1}{2}(z_0 + |z_0|) = \frac{1}{2}(\rho e^{i\theta} + \rho) = \frac{\rho}{2} e^{i\theta/2} (e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}) = \rho \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta/2}.$$

3.b.) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$z_n = \rho e^{i\theta/2^n} \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right).$$

Montrons ceci par récurrence sur $n \geq 1$.

La question 3.a. donne l'initialisation.

Supposons à présent que pour $n \geq 1$ fixé, on a : $z_n = \rho e^{i\theta/2^n} \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$. Alors comme $\frac{\theta}{2} \in \left] -\frac{\pi}{2}, 0 \right[\cup \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, on a $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$ et de même, $\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) > 0$ pour tout $k = 1, \dots, n$ donc $|z_n| = \rho \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$ donc

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= \frac{1}{2}(z_n + |z_n|) = \frac{1}{2} \left(\rho e^{i\theta/2^n} \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) + \rho \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \rho \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) \times (e^{i\theta/2^n} + 1) = \frac{1}{2} \rho \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) \times e^{i\theta/2^{n+1}} \times (e^{i\theta/2^{n+1}} + e^{-i\theta/2^{n+1}}) \\ &= \frac{1}{2} \rho \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) \times e^{i\theta/2^{n+1}} \times 2 \times \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) = \rho e^{i\theta/2^{n+1}} \prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) \end{aligned}$$

ce qui complète la récurrence.

3.c.) Montrer à présent que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$z_n = \frac{\rho}{2^n} \frac{\sin(\theta)}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} e^{i\theta/2^n}.$$

Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que: $z_n = \frac{\rho}{2^n} \frac{\sin(\theta)}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} e^{i\theta/2^n}$:

Pour $n = 1$,

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{2^n} \frac{\sin(\theta)}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} e^{i\theta/2^n} &= \frac{\rho}{2} \frac{\sin(\theta)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{i\theta/2} = \frac{\rho}{2} \frac{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{i\theta/2} \\ &= \rho \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta/2} = z_1 \end{aligned}$$

donc c'est vrai pour $n = 1$.

Supposons à présent que c'est vrai pour un entier $n \geq 1$ fixé, alors:

$$\begin{aligned}
 z_{n+1} &= \rho e^{i\theta/2^{n+1}} \prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \rho \frac{e^{i\theta/2^n}}{e^{i\theta/2^{n+1}}} \left(\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) \right) \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) \\
 &= \frac{z_n}{e^{i\theta/2^{n+1}}} \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) = \frac{\rho}{2^n} \frac{\sin(\theta)}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} \frac{e^{i\theta/2^n}}{e^{i\theta/2^{n+1}}} \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) \\
 &= \frac{\rho}{2^n} e^{i\theta/2^{n+1}} \frac{\sin(\theta)}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)} \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) = \frac{\rho}{2^{n+1}} e^{i\theta/2^{n+1}} \frac{\sin(\theta)}{\sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)}
 \end{aligned}$$

ce qui complète la récurrence.

3.d.) On note maintenant x_n la partie réelle de z_n et y_n la partie imaginaire de z_n . Exprimer x_n et y_n en fonction de ρ, θ et n et déterminer leur limite quand n tend vers $+\infty$.

$$\begin{aligned}
 \text{On a: } z_n &= \frac{\rho}{2^n} \frac{\sin(\theta)}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} \left(\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \right) \text{ donc } x_n = \frac{\rho}{2^n} \frac{\sin(\theta)}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \\
 &= \frac{\rho}{\theta} \frac{\theta}{2^n} \cot an\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \sin(\theta) = \frac{\rho}{\theta} \sin(\theta) f\left(\frac{\theta}{2^n}\right).
 \end{aligned}$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\theta}{2^n} = 0 \text{ donc d'après la question 1, } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{\rho \sin(\theta)}{\theta}.$$

$$\text{Et aussi } y_n = \frac{\rho}{2^n} \frac{\sin(\theta)}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \frac{\rho}{2^n} \sin(\theta) \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0.$$

Corrigé de l'exercice 3 : On note $z = e^{2i\pi/7}$ une racine septième de l'unité.

On pose $s = z + z^2 + z^4$ et $t = z^3 + z^5 + z^6$.

1 Calculer $s + t$ et st .

$$z \text{ est une racine septième de l'unité et } z \neq 1 \text{ donc } 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = \frac{1 - z^7}{1 - z} = 0.$$

On a donc immédiatement :

$$s + t = -1$$

De plus,

$$\begin{aligned}
 st &= z^4 + z^5 + z^6 + 3z^7 + z^8 + z^9 + z^{10} \\
 &= 3 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = 3 - 1 = 2
 \end{aligned}$$

2 En déduire les valeurs de s et t .

Quand on connaît la somme S et le produit P de deux nombres, on sait qu'ils sont racines de l'équation $z^2 - Sz + P = 0$ soit $z^2 + z + 2 = 0$.

On trouve $z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$ et $z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}$. Pour savoir laquelle est s et laquelle est t , il faut regarder le signe de la partie imaginaire. Or on a :

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(s) &= \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) \\ &= \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\end{aligned}$$

Or $\sin$ étant strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a :

$$0 < \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) < \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) < \sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)$$

donc $\operatorname{Im}(s) > 0$. Ainsi :

$$s = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2} \text{ et } t = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}$$