D.M.2 pour le 2 Novembre 2026

Exercice 1 : Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose, lorsque cela a un sens : $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ et $g(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$.

1 Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et que f est une fonction impaire.

2 Calculer et simplifier lorsque cela a un sens, $f'(x)$.

3 Montrer à l'aide du théorème de la bijection que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser.

4 Pour tout $y \in J$, déterminer l'unique antécédent x de y par f. Conclusion?

5 Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_g$ de la fonction g.

6 Calculer et simplifier, lorsque cela a un sens, $g'(x)$ (on n'étudiera pas le cas $x = 1$).

7 Montrer à l'aide du théorème de la bijection que g est une bijection de $\mathcal{D}_g$ vers un ensemble K à préciser.

8 Pour tout $y \in K$, déterminer $g^{-1}(y)$ en fonction de y.

Exercice 2 : On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$ définie par: $\forall t \in \mathbb{R}_*^+,\ \varphi(t) = t + \ln(t)$

1a Montrer que φ est une bijection.

1b Dresser le tableau de variation de son application réciproque φ^{-1} en y faisant figurer les limites aux bornes de son domaine de définition et la valeur de $\varphi^{-1}(1)$.

2 On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que: $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \ln(\varphi^{-1}(x))$.
On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

2a Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ en fonction de $\varphi^{-1}(x)$.

2b Dresser le tableau de variation de f en y faisant figurer les limites aux bornes de son domaine de définition et la valeur de $f(1)$.

2c Calculer $f'(1)$ et déterminer l'équation de la tangente T_1 à C_f en son point d'abscisse 1.

2d Montrer: $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - x = -\varphi^{-1}(x)$.
En déduire la position relative de C_f par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$ (c'est-à-dire préciser si C_f est au dessus ou en dessous de Δ). Déterminer la limite de $f(x) - x$ lorsque x tend vers $-\infty$.

2e Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$: $f(x) - \ln(x) = -\ln\left(1 + \frac{\ln(t)}{t}\right)$, où $t = \varphi^{-1}(x)$.
En déduire la position relative de C_f par rapport à la courbe $C_{\ln}$ de ln sur $]1, +\infty[$ et la limite de $f(x) - \ln(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2f Tracer dans un repère orthonormé du plan l'allure de la courbe C_f en y faisant figurer les droites T_1 et Δ, et la courbe $C_{\ln}$.

2g Montrer que f est une bijection et déterminer $f^{-1}(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 : Soit n un entier strictement positif.

On considère l'équation différentielle sur l'intervalle $]0,+\infty[$suivante:

$$(E_n) : y' + \frac{n}{x}y = \frac{1}{x\left(1+x^2\right)}$$

1 Résoudre l'équation sans second membre associé à l'équation (E_n).

2 Résoudre l'équation (E_1).

3 Résoudre l'équation (E_2).

On fixe maintenant $n \geq 3$ et on définit sur l'intervalle $]0,+\infty[$ la fonction ϕ_n par l'égalité:

$$\text{si } x > 0, \text{ alors } \phi_n(x) = \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t^2}dt$$

(On ne cherchera pas à déterminer $\phi_n(x)$ par un calcul de primitive)

4 En utilisant la méthode de variation de la constante, exprimer les solutions de (E_n) à l'aide de la fonction ϕ_n.

5 Dans cette question, on étudie si une solution de (E_n) admet une limite réelle en 0^+.

5a Soit $x > 0$. Justifier, pour $t \in [0,x]$, l'inégalité: $\dfrac{1}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq 1$

5b En déduire l'encadrement: $\dfrac{1}{1+x^2}\dfrac{x^n}{n} \leq \phi_n(x) \leq \dfrac{x^n}{n}$

5c Montrer qu'il existe une et une seule solution de (E_n) admet une limite réelle en 0^+. Préciser cette solution, qu'on notera f_n, et sa limite en 0^+.

6 On cherche maintenant à terminer l'étude des variations de la fonction f_n.

6a Justifier que $f_n'(x) = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{1+x^2} - n\dfrac{\phi_n(x)}{x^n}\right)$ et en déduire le sens de variation de f_n.

6b Justifier que f_n admet une limite réelle en $+\infty$

7 Etudier la dérivabilité en 0 du prolongement par continuité de f_n.