D.M.2 pour le 2 Novembre 2026

Exercice 1 : Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose, lorsque cela a un sens : $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ et $g(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$.

1 Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et que f est une fonction impaire.

2 Calculer et simplifier lorsque cela a un sens, $f'(x)$.

3 Montrer à l'aide du théorème de la bijection que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser.

4 Pour tout $y \in J$, déterminer l'unique antécédent x de y par f. Conclusion?

5 Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_g$ de la fonction g.

6 Calculer et simplifier, lorsque cela a un sens, $g'(x)$ (on n'étudiera pas le cas $x = 1$).

7 Montrer à l'aide du théorème de la bijection que g est une bijection de $\mathcal{D}_g$ vers un ensemble K à préciser.

8 Pour tout $y \in K$, déterminer $g^{-1}(y)$ en fonction de y.

Exercice 2 : On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$ définie par: $\forall t \in \mathbb{R}_*^+,\ \varphi(t) = t + \ln(t)$

1a Montrer que φ est une bijection.

1b Dresser le tableau de variation de son application réciproque φ^{-1} en y faisant figurer les limites aux bornes de son domaine de définition et la valeur de $\varphi^{-1}(1)$.

2 On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que: $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \ln(\varphi^{-1}(x))$.
On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

2a Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ en fonction de $\varphi^{-1}(x)$.

2b Dresser le tableau de variation de f en y faisant figurer les limites aux bornes de son domaine de définition et la valeur de $f(1)$.

2c Calculer $f'(1)$ et déterminer l'équation de la tangente T_1 à C_f en son point d'abscisse 1.

2d Montrer: $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - x = -\varphi^{-1}(x)$.
En déduire la position relative de C_f par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$ (c'est-à-dire préciser si C_f est au dessus ou en dessous de Δ). Déterminer la limite de $f(x) - x$ lorsque x tend vers $-\infty$.

2e Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$: $f(x) - \ln(x) = -\ln\left(1 + \frac{\ln(t)}{t}\right)$, où $t = \varphi^{-1}(x)$.
En déduire la position relative de C_f par rapport à la courbe $C_{\ln}$ de ln sur $]1, +\infty[$ et la limite de $f(x) - \ln(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2f Tracer dans un repère orthonormé du plan l'allure de la courbe C_f en y faisant figurer les droites T_1 et Δ, et la courbe $C_{\ln}$.

2g Montrer que f est une bijection et déterminer $f^{-1}(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 : Soit n un entier strictement positif.

On considère l'équation différentielle sur l'intervalle $]0,+\infty[$suivante:

$$(E_n) : y' + \frac{n}{x}y = \frac{1}{x\left(1+x^2\right)}$$

1 Résoudre l'équation sans second membre associé à l'équation (E_n).

2 Résoudre l'équation (E_1).

3 Résoudre l'équation (E_2).

On fixe maintenant $n \geq 3$ et on définit sur l'intervalle $]0,+\infty[$ la fonction ϕ_n par l'égalité:

$$\text{si } x > 0, \text{ alors } \phi_n(x) = \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t^2}dt$$

(On ne cherchera pas à déterminer $\phi_n(x)$ par un calcul de primitive)

4 En utilisant la méthode de variation de la constante, exprimer les solutions de (E_n) à l'aide de la fonction ϕ_n.

5 Dans cette question, on étudie si une solution de (E_n) admet une limite réelle en 0^+.

5a Soit $x > 0$. Justifier, pour $t \in [0,x]$, l'inégalité: $\dfrac{1}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq 1$

5b En déduire l'encadrement: $\dfrac{1}{1+x^2}\dfrac{x^n}{n} \leq \phi_n(x) \leq \dfrac{x^n}{n}$

5c Montrer qu'il existe une et une seule solution de (E_n) admet une limite réelle en 0^+. Préciser cette solution, qu'on notera f_n, et sa limite en 0^+.

6 On cherche maintenant à terminer l'étude des variations de la fonction f_n.

6a Justifier que $f_n'(x) = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{1+x^2} - n\dfrac{\phi_n(x)}{x^n}\right)$ et en déduire le sens de variation de f_n.

6b Justifier que f_n admet une limite réelle en $+\infty$

7 Etudier la dérivabilité en 0 du prolongement par continuité de f_n.

Corrigé exercice 1 : Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose, lorsque cela a un sens : $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ et $g(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$.

1 Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et que f est une fonction impaire.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 > x^2$ donc $\sqrt{1+x^2} > |x| \geq -x$ donc $x + \sqrt{1+x^2} > 0$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + \ln\left(-x + \sqrt{1+x^2}\right) \\ &= \ln\left(\left(\sqrt{1+x^2} + x\right)\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)\right) \\ &= \ln\left(1 + x^2 - x^2\right) = \ln(1) = 0 \end{aligned}$$

donc f est impaire.

2 Calculer et simplifier lorsque cela a un sens, $f'(x)$.

Pour tout $x > 0$, $1 + x^2 > 0$ et $y \mapsto \sqrt{y}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $x + \sqrt{1+x^2} > 0$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = \frac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

3 Montrer à l'aide du théorème de la bijection que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser.

On a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème de la bijection, f induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $J = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et puisque f est impaire, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ donc $J = \mathbb{R}$.

4 Pour tout $y \in J$, déterminer l'unique antécédent x de y par f. Conclusion?

Soit $y \in \mathbb{R}$ et $x = f^{-1}(y)$. Alors $y = f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ donc $x + \sqrt{1+x^2} = e^y$ donc $\sqrt{1+x^2} = e^y - x$ donc $1 + x^2 = e^{2y} + x^2 - 2xe^y$ donc $2xe^y = e^{2y} - 1$ donc

$$x = \frac{e^{2y} - 1}{2e^y} = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \sinh(y)$$

On en conclut que $f^{-1} = \sinh$.

5 Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_g$ de la fonction g.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

De plus, si $x \leq -1$, alors $x^2 - 1 < x^2$ donc $\sqrt{x^2-1} < |x| = -x$ donc $x + \sqrt{x^2-1} < 0$ et g n'est pas définie en x.

Enfin, si $x \geq 1$, $x + \sqrt{x^2-1} > 0$ donc g est définie en x.

Donc $\mathcal{D}_g = [1, +\infty[$.

6 Calculer et simplifier, lorsque cela a un sens, $g'(x)$.

Pour $x > 1$, $x^2 - 1 > 0$ donc g est dérivable en x comme composée de fonctions dérivables et :

$$g'(x) = \frac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1} + x}{\sqrt{x^2-1}\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

7 Montrer que à l'aide du théorème de la bijection que g est une bijection de D_g vers un ensemble K à préciser.

On a donc $\forall x \in D_g$, $g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur D_g. De plus, g est continue sur D_g donc d'après le théorème de la bijection, g induit une bijection de D_g sur $K = \left[g(1), \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) \right[$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et puisque $g(1) = 0$ donc $K = \mathbb{R}^+$.

8 Pour tout $y \in K$, déterminer $g^{-1}(y)$ en fonction de y.

Soit $y \in \mathbb{R}^+$ et $x = g^{-1}(y)$. Alors $y = g(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ donc $x + \sqrt{x^2-1} = e^y$ donc $\sqrt{x^2-1} = e^y - x$ donc $x^2 - 1 = e^{2y} + x^2 - 2xe^y$ donc $2xe^y = e^{2y} + 1$ donc

$$x = \frac{e^{2y}+1}{2e^y} = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \cosh(y)$$

On en conclut que $g^{-1} = \cosh_{|\mathbb{R}^+}$.

Corrigé de l'exercice 2 : On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$ définie par: $\forall t \in \mathbb{R}_*^+,\ \varphi(t) = t + \ln(t)$

1a Montrer que φ est une bijection.

φ est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et $\forall t \in \mathbb{R}_*^+,\ \varphi'(t) = 1 + \dfrac{1}{t} > 0$ donc φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$ et continue donc induit une bijection de $\mathbb{R}_*^+$ sur $\left]\lim\limits_{t\to 0}\varphi(t), \lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t)\right[=]-\infty, +\infty[$.

1b Dresser le tableau de variation de son application réciproque φ^{-1} en y faisant figurer les limites aux bornes de son domaine de définition et la valeur de $\varphi^{-1}(1)$.

D'après ce même théorème, φ^{-1} est une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\lim\limits_{t\to-\infty}\varphi(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t) = +\infty$.

De plus $\varphi(t) = 1 \Leftrightarrow t + \ln(t) = 1 \Leftrightarrow t = 1$ car 1 est solution et il n'y en a pas d'autres car φ est bijective d'où :

t	$-\infty$		$+\infty$
$\varphi^{-1}(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ |

à compléter par $\varphi^{-1}(1) = 1$.

2 On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que: $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \ln(\varphi^{-1}(x))$.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

2a Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ en fonction de $\varphi^{-1}(x)$.

φ est une bijection continue strictement monotone de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $\varphi'(t) = 1 + \dfrac{1}{t} > 0$ donc d'après le théorème de la dérivée de la réciproque, φ^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left(\varphi^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{1 + 1/\varphi^{-1}(x)} = \frac{\varphi^{-1}(x)}{1 + \varphi^{-1}(x)}$$

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{\left(\varphi^{-1}\right)'(x)}{\varphi^{-1}(x)} = \frac{1}{1 + \varphi^{-1}(x)}$$

2b Dresser le tableau de variation de f en y faisant figurer les limites aux bornes de son domaine de définition et la valeur de $f(1)$.

φ^{-1} est à valeurs positives donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) > 0$. De plus, sans forme indéterminée, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ d'où :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow^{+\infty}$

et $f(1) = \ln(\varphi^{-1}(1)) = \ln(1) = 0$.

2c Calculer $f'(1)$ et déterminer l'équation de la tangente T_1 à C_f en son point d'abscisse 1.

De plus, $f'(1) = \dfrac{1}{1 + \varphi^{-1}(1)} = \dfrac{1}{2}$ d'où :

$$T_1 : y = \frac{1}{2}(x - 1)$$

2d Montrer: $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - x = -\varphi^{-1}(x)$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) + \varphi^{-1}(x) = \ln\left(\varphi^{-1}(x)\right) + \varphi^{-1}(x) = \varphi\left(\varphi^{-1}(x)\right) = x$$

donc $f(x) - x = -\varphi^{-1}(x)$.

En déduire la position relative de C_f par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$ (c'est-à-dire préciser si C_f est au dessus ou en dessous de Δ). Déterminer la limite de $f(x) - x$ lorsque x tend vers $-\infty$.

φ^{-1} est à valeurs positives donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - x < 0$ donc $f(x) < x$ donc C_f est en-dessous de la droite Δ. De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} -\varphi^{-1}(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - x) = 0$.

2e Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$: $f(x) - \ln(x) = -\ln\left(1 + \frac{\ln(t)}{t}\right)$, où $t = \varphi^{-1}(x)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, on pose $t = \varphi^{-1}(x)$ et on a :

$$\begin{aligned} \ln\left(1 + \frac{\ln(t)}{t}\right) &= \ln\left(\frac{t + \ln(t)}{t}\right) = \ln\left(\frac{\varphi(t)}{t}\right) \\ &= \ln\left(\frac{\varphi(\varphi^{-1}(x))}{\varphi^{-1}(x)}\right) = \ln(x) - \ln\left(\varphi^{-1}(x)\right) \\ &= \ln(x) - f(x) \end{aligned}$$

donc $f(x) - \ln(x) = -\ln\left(1 + \frac{\ln(t)}{t}\right)$.

En déduire la position relative de C_f par rapport à la courbe $C_{\ln}$ de ln sur $]1, +\infty[$ et la limite de $f(x) - \ln(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Pour tout $x \in]1, +\infty[$, $t = \varphi^{-1}(x) > \varphi^{-1}(1) = 1$ donc $1 + \dfrac{\ln(t)}{t} > 1$ donc $\ln\left(1 + \frac{\ln(t)}{t}\right) > 0$ donc $f(x) - \ln(x) < 0$ donc $f(x) < \ln(x)$ donc C_f est en-dessous de la courbe $C_{\ln}$ de ln sur $]1, +\infty[$.

De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi^{-1}(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln(t)}{t} = 0$ par croissance comparée donc par composition de limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(\varphi^{-1}(x))}{\varphi^{-1}(x)} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\ln\left(1 + \dfrac{\ln(\varphi^{-1}(x))}{\varphi^{-1}(x)}\right)\right) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \ln(x)) = 0$.

2f Tracer dans un repère orthonormé du plan l'allure de la courbe C_f en y faisant figurer les droites T_1 et Δ, et la courbe $C_{\ln}$.

Tracé approximatif :

2g Montrer que f est une bijection et déterminer $f^{-1}(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème de la bijection, f induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right[= \mathbb{R}$.

De plus si $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} y &= f(x) \Leftrightarrow y = \ln\left(\varphi^{-1}(x)\right) \Leftrightarrow \varphi^{-1}(x) = e^y \\ &\Leftrightarrow x = \varphi(e^y) \text{ car } \varphi \text{ est bijective} \\ &\Leftrightarrow x = e^y + \ln(e^y) = e^y + y \end{aligned}$$

donc $f^{-1}(y) = e^y + y$.
Ce dernier calcul par équivalence suffit à établir la bijectivité de f, sans utiliser le théorème de la bijection.

Corrigé exercice 3:

Soit n un entier strictement positif.
On considère l'équation différentielle sur l'intervalle $]0, +\infty[$suivante:

$$(E_n) : y' + \frac{n}{x}y = \frac{1}{x(1+x^2)}$$

1 Résoudre l'équation sans second membre associé à l'équation (E_n).
On pose $(E_0) : y' + \frac{n}{x}y = 0$. On pose $a(x) = \frac{n}{x}$; $A(x) = n\ln(x)$.
Les solutions de (E_0) sont les fonctions $x \longmapsto \lambda e^{-n\ln(x)} = \lambda x^{-n} = \frac{\lambda}{x^n}, \lambda \in \mathbb{R}$.

2 Résoudre l'équation (E_1).
Pour résoudre (E_1), on pose $y = z\varphi$ avec $\varphi(x) = \frac{1}{x}$.
y vérifie $(E_1) \Longleftrightarrow y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x(1+x^2)} \Longleftrightarrow z'\varphi + z\varphi' + \frac{1}{x}z\varphi = \frac{1}{x(1+x^2)}$
$\Longleftrightarrow z'\varphi = \frac{1}{x(1+x^2)} \Longleftrightarrow z' = \frac{1}{(1+x^2)} \Longleftrightarrow z = \arctan(x) + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$.
Les solutions de (E_1) sont les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par $x \longmapsto \frac{\arctan(x) + \lambda}{x}, \lambda \in \mathbb{R}$.

3 Résoudre l'équation (E_2).
On fixe maintenant $n \geq 3$ et on définit sur l'intervalle $]0, +\infty[$ la fonction ϕ_n par l'égalité: si $x > 0$, alors $\phi_n(x) = \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t^2}dt$
Pour résoudre (E_2), on pose $y = z\varphi$ avec $\varphi(x) = \frac{1}{x^2}$.
y vérifie $(E_2) \Longleftrightarrow y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x(1+x^2)} \Longleftrightarrow z'\varphi = \frac{1}{x(1+x^2)} \Longleftrightarrow z' = \frac{x}{1+x^2}$,
équation de solutions $z = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$.
Les solutions de (E_2) sont les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par $x \longmapsto \frac{\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \lambda}{x^2}, \lambda \in \mathbb{R}$.

4 En utilisant la méthode de variation de la constante, exprimer les solutions de (E_n) à l'aide de la fonction ϕ_n.
Pour résoudre (E_n), on pose $y = z\varphi$ avec $\varphi(x) = \frac{1}{x^n}$.
y vérifie $(E_n) \Longleftrightarrow y' + \frac{n}{x}y = \frac{1}{x(1+x^2)} \Longleftrightarrow z'\varphi = \frac{1}{x(1+x^2)} \Longleftrightarrow z' = \frac{x^{n-1}}{1+x^2} : (E'_n)$
La fonction ϕ_n est une primitive de $x \longmapsto \frac{x^{n-1}}{1+x^2}$. L'équation (E'_n) a pour solutions $z = \phi_n(x) + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$.
Les solutions de (E_n) sont les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par $x \longmapsto \frac{\phi_n(x) + \lambda}{x^n}, \lambda \in \mathbb{R}$.

5 Dans cette question, on étudie si une solution de (E_n) admet une limite réelle en 0^+.

5a Soit $x > 0$. Justifier, pour $t \in [0, x]$, l'inégalité: $\dfrac{1}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq 1$

$0 \leq t \leq x$ donc $1 \leq 1 + t^2 \leq 1 + x^2$ donc $\dfrac{1}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq 1$

5b En déduire l'encadrement: $\dfrac{1}{1+x^2}\dfrac{x^n}{n} \leq \phi_n(x) \leq \dfrac{x^n}{n}$

On multiplie par $t^{n-1} > 0$: $\dfrac{t^{n-1}}{1+x^2} \leq \dfrac{t^{n-1}}{1+t^2} \leq t^{n-1}$ et on intègre entre 0 et x:

$\int_0^x \dfrac{t^{n-1}}{1+x^2}dt \leq \int_0^x \dfrac{t^{n-1}}{1+t^2}dt \leq \int_0^x t^{n-1}dt$ donc $\dfrac{1}{1+x^2}\int_0^x t^{n-1}dt \leq \phi_n(x) \leq \int_0^x t^{n-1}dt$ d'où :

$$\frac{1}{1+x^2}\frac{x^n}{n} \leq \phi_n(x) \leq \frac{x^n}{n}$$

5c Montrer qu'il existe une et une seule solution de (E_n) admet une limite réelle en 0^+.

Préciser cette solution, qu'on notera f_n, et sa limite en 0^+.

$\dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{\lambda}{x^n} \leq \dfrac{\phi_n(x) + \lambda}{x^n} \leq \dfrac{1}{n} + \dfrac{\lambda}{x^n}$.

Si $\lambda > 0$ alors $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\lambda}{x^n} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\phi_n(x) + \lambda}{x^n} = +\infty$. De même, si $\lambda < 0$, alors $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\phi_n(x) + \lambda}{x^n} = -\infty$.

Si $\lambda = 0$, alors, $\dfrac{1}{1+x^2}\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\phi_n(x)}{x^n} \leq \dfrac{1}{n}$. Si $f_n(x) = \dfrac{\phi_n(x)}{x^n}$ alors $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = \dfrac{1}{n}$ (th d'encadrement).

6 On cherche maintenant à terminer l'étude des variations de la fonction f_n.

6a Justifier que ${f_n}'(x) = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{1+x^2} - n\dfrac{\phi_n(x)}{x^n}\right)$ et en déduire le sens de variation de f_n.

La fonction f_n est solution de (E_n) donc $f_n'(x) = \dfrac{1}{x(1+x^2)} - \dfrac{n}{x}f_n(x) = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{1+x^2} - n\dfrac{\phi_n(x)}{x^n}\right)$

Or $\dfrac{1}{1+x^2} \leq n\dfrac{\phi_n(x)}{x^n} \leq 1$ donc $-1 \leq -n\dfrac{\phi_n(x)}{x^n} \leq -\dfrac{1}{1+x^2}$ et donc $\dfrac{1}{1+x^2} - n\dfrac{\phi_n(x)}{x^n} \leq 0$.

On en déduit que $f_n' \leq 0$ sur $]0, +\infty[$. La fonction f_n est donc décroissante sur $]0, +\infty[$.

6b Justifier que f_n admet une limite réelle en $+\infty$

De plus, $\phi_n(x) \geq \dfrac{1}{1+x^2}\dfrac{x^n}{n} \geq 0$ donc f_n est minorée. Elle admet donc une limite réelle en $+\infty$.

7 Etudier la dérivabilité en 0 du prolongement par continuité de f_n.

Calculons le taux d'accroissement: $t(x) = \dfrac{f_n(x) - \frac{1}{n}}{x} = \dfrac{\frac{\phi_n(x)}{x^n} - \frac{1}{n}}{x} = \dfrac{\phi_n(x) - \frac{1}{n}x^n}{x^{n+1}} = \dfrac{\int_0^x \dfrac{t^{n-1}}{1+t^2}dt - \frac{1}{n}x^n}{x^{n+1}}$

$t(x) = \dfrac{\int_0^x \dfrac{t^{n-1}}{1+t^2}dt - \int_0^x t^{n-1}dt^n}{x^{n+1}} = \dfrac{\int_0^x t^{n-1}\left(\dfrac{1}{1+t^2} - 1\right)dt}{x^{n+1}} = -\dfrac{\int_0^x \dfrac{t^{n+1}}{1+t^2}dt}{x^{n+1}}$

Or $\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+x^2}dt \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t^2}dt \leq \int_0^x t^{n+1}dt$ d'où $\frac{1}{1+x^2}\frac{x^{n+2}}{n+2} \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t^2}dt \leq \frac{x^{n+2}}{n+2}$
$-\frac{x}{n+2} \leq t(x) \leq -\frac{1}{1+x^2}\frac{x}{n+2}$; donc par encadrement, $\lim_{x\to 0^+} t(x) = 0$; f_n est dérivable en 0 de dérivée $f_n'(0) = 0$.