D.S.1 jeudi 30 septembre 2023

Exercice 1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$.

1 Donner une expression simplifiée de $f(x)$ pour $x \neq 1$.

2 En déduire deux expressions de $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

3 En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=1}^{n} k2^k$.

4 Calculer $\sum\limits_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \dfrac{1}{k^2}\right)$ (par sommes telescopiques).

Exercice 2 : Soit n un entier tel que $n \geq 2$. Pour tout nombre complexe u de module 1, on définit les nombres complexes suivants :

$$A(u) = (1+u)^n + (1+\overline{u})^n$$

et

$$B(u) = (1+u)^n - (1+\overline{u})^n$$

1 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\left(1+e^{i\theta}\right)^n = \alpha(n,\theta)\, e^{i\beta(n,\theta)}$$

où $\alpha(n,\theta)$ et $\beta(n,\theta)$ sont des nombres réels à exprimer explicitement en fonction de n et θ.

2 Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

2a A l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer $A\left(e^{i\theta}\right)$ et $B\left(e^{i\theta}\right)$ comme une somme.

2b Grâce à la question 1, en déduire les égalités suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta) = \alpha(n,\theta)\cos(\beta(n,\theta))$$

et

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta) = \alpha(n,\theta)\sin(\beta(n,\theta))$$

3 Dans cette question, on applique les égalités ci-dessus au cas où $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

3a Soit k un entier tel que $0 \leq k \leq n$. Déterminer la valeur de $\cos\left(\dfrac{k\pi}{2}\right)$ suivant les valeurs de k.

3b Soit k un entier tel que $0 \leq k \leq n$. Déterminer la valeur de $\sin\left(\dfrac{k\pi}{2}\right)$ suivant les valeurs de k.

3c Déterminer les valeurs de $\cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$ suivant les valeurs de n.

3d Déterminer les valeurs de $\sin\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$ suivant les valeurs de n.

3e En déduire que si n est un multiple de 4, on a :

$$\sum_{p=0}^{n/2} (-1)^p \binom{n}{2p} = (-1)^{n/4} \left(\sqrt{2}\right)^n$$

et

$$\sum_{p=0}^{(n-2)/2} (-1)^p \binom{n}{2p+1} = 0$$

Exercice 3 : Calcul de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

On pose $a = \cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$, $b = \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ et $c = \cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.

1a Que vaut $a + c$?

1b A l'aide d'une formule de trigonométrie que vous rappelerez, exprimer c en fontion de b.

2 Soient $p, q \in \mathbb{R}$.

2a Démontrer la formule :

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

2b Déterminer $b + c$ en fonction du produit bc.

3 Montrer que $4b^3 - 2b^2 - 3b + 1 = 0$.

4 Trouver une racine évidente α de l'équation $4x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$ puis factoriser $4x^3 - 2x^2 - 3x + 1$ par $(x - \alpha)$.

5 Montrer que b est l'une des racines du trinôme $4x^2 + 2x - 1$.

6 Déterminer b.

Exercice 4 : Des calculs et des majorations de sommes.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul et $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ sont **des réels de** $[-1, 1]$.

1 Soient $a_1, a_2, \ldots a_n$ des réels quelconques et $S = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Montrer que :

$$|S| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

2 On pose :

$$\begin{aligned} S_1 &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n \\ S_2 &= x_1 + 2^2x_2 + 3^2x_3 + \cdots + n^2x_n \end{aligned}$$

2a Montrer que $|S_1| \leq \dfrac{n(n+1)}{2}$

2b Majorer $|S_2|$.

3 Démontrer **par récurrence** la formule $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

En déduire une majoration de $S_3 = x_1^3 + 2^3 x_2^3 + 3^3 x_3^3 + \cdots + n^3 x_n^3$.

4 Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

4a Développez $(a+b)^5$, on donnera le résultat avec des coefficients numériques entièrement explicites.

4b Calculer de deux manières différentes la quantité $T = \sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^5 - k^5\right)$.

4c En déduire une formule explicite pour $\sum_{k=1}^{n} k^4$ (on donnera le résultat sous une forme factorisée par $n(n+1)$).

5 Autre chose :

5a Montrer que $\left|\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_k\right| \leq 2^n$ et $\left|\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_k^k\right| \leq 2^n$.

5b Calculer $S_4 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$.

6 Pour tout $i = 1, \ldots, n$, on pose $s_i = \sum_{k=i}^{n} x_k$ et on suppose que $s_1 = 0$.

Montrer que pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, $|s_i| \leq \min(n-i+1, i-1)$.

Corrigé de l'exercice 1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$.

1 Donner une expression simplifiée de $f(x)$ pour $x \neq 1$.

On a pour $x \neq 1$: $f(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.

2 En déduire deux expressions de $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$

et aussi $f'(x) = \dfrac{-(n+1)x^n(1-x) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}$.

3 En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k2^k$.

On a donc $f'(2) = \sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = \dfrac{(n+1)2^n + 1 - 2^{n+1}}{(-1)^2} = 2^n(n-1) + 1$

donc $\sum_{k=1}^{n} k2^k = 2\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = 2^{n+1}(n-1) + 2$.

4 Calculer $\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \dfrac{1}{k^2}\right)$ (par sommes telescopiques).

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \left(\ln(k-1) + \ln(k+1) - 2\ln(k)\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1) + \sum_{k=2}^{n} \ln(k+1) - 2\sum_{k=2}^{n} \ln(k) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) + \sum_{k=3}^{n+1} \ln(k) - 2\sum_{k=2}^{n} \ln(k) \\
&= \ln(1) - \ln(n) + \ln(n+1) - \ln(2) \\
&= \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right).
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 2 : Soit n un entier tel que $n \geq 2$. Pour tout nombre complexe u de module 1, on définit les nombres complexes suivants :

$$A(u) = (1+u)^n + (1+\overline{u})^n$$

et

$$B(u) = (1+u)^n - (1+\overline{u})^n$$

1 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\left(1 + e^{i\theta}\right)^n = \alpha(n,\theta)\, e^{i\beta(n,\theta)}$$

où $\alpha(n,\theta)$ et $\beta(n,\theta)$ sont des nombres réels à exprimer explicitement en fonction de n et θ.

On a : $\left(1+e^{i\theta}\right)^n = \left(e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2}\right)\right)^n = e^{in\theta/2}\left(2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right)^n = 2^n\cos^n\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{in\theta/2}$

2 Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

A l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer $A\left(e^{i\theta}\right)$ et $B\left(e^{i\theta}\right)$ comme une somme.
On a : $A\left(e^{i\theta}\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{i\theta}\right)^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{-i\theta}\right)^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{ik\theta}+e^{-ik\theta}\right) = 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\theta)$
et $B\left(e^{i\theta}\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{ik\theta}-e^{-ik\theta}\right) = 2i\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\theta)$

2b Grâce à la question 1, en déduire les égalités suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\theta) = \alpha(n,\theta)\cos(\beta(n,\theta))$$

et

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\theta) = \alpha(n,\theta)\sin(\beta(n,\theta))$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} A\left(e^{i\theta}\right) &= \left(1+e^{i\theta}\right)^n + \left(1+e^{-i\theta}\right)^n = 2^n\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{in\theta/2} + 2^n\cos^n\left(\frac{-\theta}{2}\right)e^{-in\theta/2} \\ &= 2^n\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\times 2\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

donc en comparant les deux expressions :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\theta) = 2^n\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) = \alpha(n,\theta)\cos(\beta(n,\theta))$$

et de même :

$$\begin{aligned} B\left(e^{i\theta}\right) &= \left(1+e^{i\theta}\right)^n - \left(1+e^{-i\theta}\right)^n = 2^n\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{in\theta/2} - 2^n\cos^n\left(\frac{-\theta}{2}\right)e^{-in\theta/2} \\ &= 2^n\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\times 2i\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

donc en comparant les deux expressions :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\theta) = 2^n\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) = \alpha(n,\theta)\sin(\beta(n,\theta))$$

3 Dans cette question, on applique les égalités ci-dessus au cas où $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

3a Soit k un entier tel que $0 \leq k \leq n$. Déterminer la valeur de $\cos\left(\dfrac{k\pi}{2}\right)$ suivant les valeurs de k.

Pour $k = 0$ [4] (ie k multiple de 4), on a $\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) = 1$ (car $\frac{k\pi}{2} = 0\ [2\pi]$)

Pour $k = 1$ [4] (ie $k = 4p + 1$, $p \in \mathbb{Z}$), on a $\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) = 0$ (car $\frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$)

Pour $k = 2$ [4] (ie $k = 4p + 2$, $p \in \mathbb{Z}$), on a $\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) = -1$ (car $\frac{k\pi}{2} = \pi\ [2\pi]$)

Pour $k = 3$ [4] (ie $k = 4p + 3$, $p \in \mathbb{Z}$), on a $\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) = 0$ (car $\frac{k\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}\ [2\pi]$)

3b Soit k un entier tel que $0 \leq k \leq n$. Déterminer la valeur de $\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$ suivant les valeurs de k.

Pour $k = 0$ [4] (ie k multiple de 4), on a $\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = 0$ (car $\frac{k\pi}{2} = 0\ [2\pi]$)

Pour $k = 1$ [4] (ie $k = 4p + 1$, $p \in \mathbb{Z}$), on a $\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = 1$ (car $\frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$)

Pour $k = 2$ [4] (ie $k = 4p + 2$, $p \in \mathbb{Z}$), on a $\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = 0$ (car $\frac{k\pi}{2} = \pi\ [2\pi]$)

Pour $k = 3$ [4] (ie $k = 4p + 3$, $p \in \mathbb{Z}$), on a $\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = -1$ (car $\frac{k\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}\ [2\pi]$)

3c Déterminer les valeurs de $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ suivant les valeurs de n.

Il faut cette fois distinguer suivant la valeur de n modulo 8. Si n est congru modulo 8 à :

- 0, alors $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 1$
- 1, alors $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- 2, alors $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 0$
- 3, alors $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 4, alors $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = -1$
- 5, alors $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 6, alors $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 0$
- 7, alors $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3d Déterminer les valeurs de $\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ suivant les valeurs de n.

De même, si n est congru modulo 8 à :

- 0, alors $\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 0$
- 1, alors $\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- 2, alors $\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 1$
- 3, alors $\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- 4, alors $\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 0$
- 5, alors $\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 6, alors $\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = -1$
- 7, alors $\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

3e En déduire que si n est un multiple de 4, on a :

$$\sum_{p=0}^{n/2} (-1)^p \binom{n}{2p} = (-1)^{n/4} \left(\sqrt{2}\right)^n$$

et

$$\sum_{p=0}^{(n-2)/2} (-1)^p \binom{n}{2p+1} = 0$$

On suppose $n = 4l$, $l \in \mathbb{N}$ et on prend $\theta = \frac{\pi}{2}$ dans la première formule du 2, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{4l} \binom{n}{k} \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) = 2^n \cos^n\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(l\pi\right)$$

Or pour k impair, $\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)$ donc on peut poser $k = 2p$, $p \in \mathbb{N}$.et il vient :

$$\sum_{p=0}^{2l} \binom{n}{2p} (-1)^p = 2^n \left(-1\right)^l \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$$

soit :

$$\sum_{p=0}^{n/2} (-1)^p \binom{n}{2p} = (-1)^{n/4} \left(\sqrt{2}\right)^n$$

et avec la seconde formule :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)=2^n\cos^n\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

et pour k pair, $\sin\left(k\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ donc on peut poser $k=2p+1$ et on remarque :

$$\begin{aligned} k &\leq n \Leftrightarrow 2p+1\leq 4l \Leftrightarrow 2p+1\leq 4l-1 \\ &\Leftrightarrow p\leq 2l-1=(n-2)/2 \end{aligned}$$

donc on obtient :

$$\sum_{p=0}^{(n-2)/2}\binom{n}{2p+1}(-1)^{p+1}=2^n\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\times 0$$

donc en changeant le signe :

$$\sum_{p=0}^{(n-2)/2}(-1)^p\binom{n}{2p+1}=0$$

Corrigé de l'exercice 3 : Calcul de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

1 On pose $a=\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$, $b=\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ et $c=\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.

1a Que vaut $a+c$?
$c=\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)=-\cos\left(\pi-\dfrac{4\pi}{5}\right)=-\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ donc $a+c=0$.

1b A l'aide d'une formule de trigonométrie que vous rappelerez, exprimer c en fontion de b.
On a $\cos(2x)=2\cos^2(x)-1$ donc :

$$c=2b^2-1$$

2 Soient $p,q\in\mathbb{R}$.

2a Démontrer la formule :

$$\cos p+\cos q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Vu en exercice dans le poly de cours.

2b Déterminer $b+c$ en fonction du produit bc.
On applique cette formule :

$$\begin{aligned} b+c &= \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=2\cos\left(\frac{6\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{10}\right) \\ &= 2a\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)=-2a\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{5}\right)=-2ab=2bc \end{aligned}$$

3 Montrer que $4b^3 - 2b^2 - 3b + 1 = 0$.
On a donc :

$$\begin{array}{rcl} b + c &=& 2bc \\ b + 2b^2 - 1 &=& 2b\left(2b^2 - 1\right) \\ 4b^3 - 2b^2 - 3b + 1 &=& 0 \end{array}$$

4 Trouver une racine évidente α de l'équation $4x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$ puis factoriser $4x^3 - 2x^2 - 3x + 1$ par $(x - \alpha)$.
1 est racine évidente. On trouve après calculs :

$$4x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = (x-1)\left(4x^2 + 2x - 1\right)$$

5 Montrer que b est l'une des racines du trinôme $4x^2 + 2x - 1$.
$\frac{2\pi}{5} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $b = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \in [0,1[$ donc $b - 1 \neq 0$ donc b est racine du trinôme $4x^2 + 2x - 1$.

6 Déterminer b.
On résoud ce trinôme : $\Delta = 4 + 16 = 20 = \left(2\sqrt{5}\right)^2$, les racines sont $x_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$ et $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$.
Or $b \geq 0$ et $x_1 < 0$ donc $b = x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$.

Corrigé de l'exercice 4 : Des calculs et des majorations de sommes. Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul et $x_0, x_1, x_2, \dots x_n$ sont des réels de $[-1, 1]$.

1 Soient $a_1, a_2, \dots a_n$ des réels quelconques et $S = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Montrer que :

$$|S| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

Une récurrence sur n permet de formaliser le raisonnement suivant utilisant l'inégalité triangulaire à répétition :

$$\begin{array}{rcl} |S| &=& |a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2 + \cdots + a_n| \\ &\leq& |a_1| + |a_2| + |a_3 + \cdots + a_n| \\ &\leq& \cdots \\ &\leq& |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \end{array}$$

2 On pose :

$$\begin{array}{rcl} S_1 &=& x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n \\ S_2 &=& x_1 + 2^2x_2 + 3^2x_3 + \cdots + n^2x_n \end{array}$$

2a Montrer que $|S_1| \leq \frac{n(n+1)}{2}$.

D'après ci-dessus, on a :

$$\begin{aligned} |S_1| &\leq |x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n| \\ &\leq |x_1| + |2x_2| + \cdots + |nx_n| \\ &\leq 1 + 2 + \cdots + n \text{ car } x_i \in [0,1] \\ &\leq \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

2b Majorer $|S_2|$.

De même, on a :

$$\begin{aligned} |S_2| &\leq \left|x_1 + 2^2x_2 + 3^2x_3 + \cdots + n^2x_n\right| \\ &\leq |x_1| + \left|2^2x_2\right| + \cdots + \left|n^2x_n\right| \\ &\leq 1 + 2^2 + \cdots + n^2 \text{ car } x_i \in [0,1] \\ &\leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

3 Démontrer **par récurrence** la formule $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

En déduire une majoration de $S_3 = x_1^3 + 2^3x_2^3 + 3^3x_3^3 + \cdots + n^3x_n^3$.

▶ Initialisation : $n = 1$, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{1} k^3 = 1$ et $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 1$ donc la formule est vraie pour $n = 1$.

▶ Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Alors on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \\ &= (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) = (n+1)^2\,\frac{n^2+4n+2}{4} \\ &= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

4 Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

4a Développez $(a+b)^5$, on donnera le résultat avec des coefficients numériques entièrement explicites.

On a : $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

4b Calculer de deux manières différentes la quantité $T = \sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^5 - k^5\right)$.

On a par somme télescopique $T = \sum\limits_{k=1}^{n} \left((k+1)^5 - k^5 \right) = (n+1)^5 - 1$ et d'autre part :

$$\begin{aligned} T &= \sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^5 - k^5 \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 \right) \\ &= 5\sum_{k=1}^{n} k^4 + 10\sum_{k=1}^{n} k^3 + 10\sum_{k=1}^{n} k^2 + 5\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= 5\sum_{k=1}^{n} k^4 + 5\frac{n^2 (n+1)^2}{2} + \frac{5}{3}n(n+1)(2n+1) + \frac{5}{2}n(n+1) + n \end{aligned}$$

4c En déduire une formule explicite pour $\sum\limits_{k=1}^{n} k^4$.

On a donc :

$$\begin{aligned} 5\sum_{k=1}^{n} k^4 &= (n+1)^5 - 1 - n - 5\frac{n^2(n+1)^2}{2} - \frac{5}{3}n(n+1)(2n+1) - \frac{5}{2}n(n+1) \\ &= (n+1)\left((n+1)^4 - 1 - 5\frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{5}{3}n(2n+1) - \frac{5}{2}n \right) \\ &= (n+1)\left(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - 5\frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{5}{3}n(2n+1) - \frac{5}{2}n \right) \\ &= n(n+1)\left(n^3 + 4n^2 + 6n + 4 - \frac{5}{2}\left(n^2+n\right) - \frac{5}{3}(2n+1) - \frac{5}{2} \right) \\ &= n(n+1)\left(n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{6}n - \frac{1}{6} \right) \end{aligned}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3 - 9n^2 + n - 1)}{30}$$

5 Autre chose :

5a Montrer que $\left| \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_k \right| \leq 2^n$ et $\left| \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_k^k \right| \leq 2^n$.

On a : $\left| \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_k \right| \leq \sum\limits_{k=0}^{n} \left| \binom{n}{k} x_k \right| \leq \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |x_k| \leq \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$.

5b Calculer $S_4 = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$.

On a :$S_4 = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} = (2+1)^n = 3^n$.

6 Pour tout $i = 1, \ldots, n$, on pose $s_i = \sum\limits_{k=i}^{n} x_k$ et on suppose que $s_1 = 0$.

Montrer que pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, $|s_i| \leq \min(n - i + 1, i - 1)$.
Soit $i \in \{1, \ldots n\}$.

On a : $|s_i| = \left|\sum_{k=i}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=i}^{n} |x_k| \leq \sum_{k=i}^{n} 1 = n - i + 1$.
D'autre part, $s_i = \sum_{k=i}^{n} x_k = x_i + x_{i+1} + \cdots + x_n = -(x_1 + \cdots + x_{i-1})$ donc le même raisonnement donne $|s_i| \leq \sum_{k=1}^{i-1} 1 = i - 1$.
Donc $|s_i| \leq \min(n - i + 1, i - 1)$.