D.S.2 samedi 21 Octobre 2023

Exercice 1 : Pour deux entiers naturels p et q, on pose $I_{p,q} = \int_0^1 x^p \left(1-x\right)^q dx$.

1 Calculer $I_{0,q}$ et $I_{p,0}$.

2 Montrer que $I_{q,q} \leq \dfrac{1}{4^q}$.

3 Montrer que $I_{p,q} = \dfrac{p}{q+1} I_{p-1,q+1}$.

4 En déduire que $I_{p,q} = \dfrac{1}{p+q+1} \dfrac{p!q!}{(p+q)!}$.

5 On pose $J = \int_0^{\pi/2} \left(\sin(x)\right)^{2p+1} \left(\cos(x)\right)^{2q+1} dx$. Faire le changement de variable $u = \sin(x)$, puis à l'aide d'un second changement de variable, calculer J.

Exercice 2: Déterminer les primitives suivantes, en justifiant l'existence de ces primitives et en précisant le domaine de validité de ces primitives. On pourra faire un changement de variables pour les deux premières :

1 $f_1\left(x\right) = \dfrac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}$

2 $f_2\left(x\right) = \dfrac{1}{1+3e^{-x}}$

3 $f_4\left(x\right) = x\cos\left(x\right)$.

Exercice 3 :

1 Simplifier les réels suivants: $\alpha = \arccos\left(\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)$; $\beta = \arctan\left(\tan\left(\dfrac{807\pi}{4}\right)\right)$.

2 Résoudre l'équation $\arccos\left(x\right) = \arcsin\left(1-x\right)$.

3 Résoudre l'équation $\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{5}\right) = \arctan\left(x\right)$

Exercice 4 : On définit une fonction f par $f\left(x\right) = \dfrac{x}{1+\ln\left(x\right)}$.

1a Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}_f$ de définition de f. Vérifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et calculer $f'\left(x\right)$ pour tout x dans $\mathcal{D}_f$.

1b Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On renomme la fonction prolongée f.

1c Ainsi prolongée, f est-elle dérivable en 0 ?

2a Etudier les variations de f sur son ensemble de définition ; on présentera les résultats dans un tableau précisant les limites aux différents bords.

2b Représenter l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f dans un repère orthonormé.

Problème :

Etude de fonction : Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on définit la fonction f_n sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{(\ln(x))^n}{n!x^2}$

1 Etudier les variations de la fonction f_n : on donnera la réponse sous la forme de deux tableaux de variations selon que n est pair ou impair, et on précisera les limites de f_n aux bornes de son ensemble de définition.

2 Montrer que la valeur maximale de la fonction f_n sur l'intervalle $[1,+\infty[$ est $y_n = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{n}{2e}\right)^n$.

3 Montrer que $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n \leq e$ (indication: on rappelle que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$).

4 En déduire que $y_{n+1} \leq \frac{1}{2}y_n$

5 Montrer que $y_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} y_1$ et justifier que la suite (y_n) converge vers une limite à préciser.

Etude d'intégrales On pose $I_n(x) = \int_1^x f_n(t)dt = \int_1^x \dfrac{(\ln(t))^n}{n!t^2}dt$ pour tout réel $x \in [1,+\infty[$

6 Calculer $I_1(x)$

7 Montrer que, pour tout réel $x \in [1,+\infty[$, pour tout entier naturel non nul k :

$$I_{k+1}(x) = I_k(x) - \frac{(\ln(x))^{k+1}}{(k+1)!x}$$

8 En déduire que pour tout réel $x \in [1,+\infty[$, pour tout entier naturel non nul n :

$$I_n(x) = 1 - \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{n}\frac{(\ln(x))^k}{k!}$$

9 Montrer que $0 \leq I_n(x) \leq (x-1)\,y_n$

10 En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(x)$

11 Pour tout réel $t > 0$, on pose $U_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{t^k}{k!}$.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n(t) = e^t$. Indication: on pourra poser $x = e^t$.

Corrigé de l'exercice 1 : Pour deux entiers naturels p et q, on pose $I_{p,q} = \int_0^1 x^p (1-x)^q \, dx$.

1 $I_{0,q} = \int_0^1 (1-x)^q \, dx = \left[\frac{-1}{q+1}(1-x)^{q+1}\right]_0^1 = \frac{1}{q+1}$

2 On montre facilement que $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ pour $x \in [0,1]$; on en déduit $x^p (1-x)^p \leq \frac{1}{4^p}$ donc

$$I_{p,p} = \int_0^1 x^p (1-x)^p \, dx \leq \int_0^1 \frac{1}{4^p} dx = \frac{1}{4^p}.$$

3 $I_{p,q} = \int_0^1 x^p (1-x)^q \, dx$; on intègre par parties en posant $u = x^p$, $u' = px^{p-1}$, $v' = (1-x)^q$ et $v = \frac{-1}{q+1}(1-x)^{q+1}$ d'où :

$$I_{p,q} = \left[\frac{-1}{q+1}(1-x)^{q+1} x^p\right]_0^1 + \frac{p}{q+1}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q+1} \, dx = 0 + \frac{p}{q+1} I_{p-1,q+1}.$$

4 On a donc:

$$\begin{aligned} I_{p,q} &= \frac{p}{q+1} I_{p-1,q+1} = \frac{p}{q+1}\frac{p-1}{q+2} I_{p-2,q+2} = \cdots \\ &= \frac{p(p-1)\cdots 2.1}{(q+1)(q+2)\cdots(q+p-1)(q+p)} I_{0,q+p} = \frac{p!q!}{(p+q)!}\frac{1}{p+q+1}. \end{aligned}$$

5 On a $J = \int_0^{\pi/2} (\sin(x))^{2p+1} (\cos(x))^{2q+1} \, dx = \int_0^{\pi/2} (\sin(x))^{2p+1} \left(1 - \sin^2(x)\right)^q \cos(x) dx$.
On pose $u = \sin(x), du = \cos(x) dx$ donc $J = \int_0^1 u^{2p+1} (1-u^2)^q \, du$.
Posons à présent $x = u^2$, $dx = 2udu$ d'où :

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 x^p (1-x)^q \, dx = \frac{1}{2} I_{p,q} = \frac{1}{2(p+q+1)}\frac{p!q!}{(p+q)!}.$$

Corrigé de l'exercice 2 :

1 $f_1(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}$.
$\forall x \in \mathbb{R}, e^x + 1 > 0$ et $\sqrt{e^x+1} \neq 0$ donc f_1 est définie et continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient et composée de fonctions continues donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et en posant $u = e^t$, $du = e^t dt$ on a :

$$\int^x f_1(t) \, dt = \int^x \frac{e^t}{\sqrt{e^t+1}} dt = \int^{e^x} \frac{du}{\sqrt{1+u}} = \left[2\sqrt{1+u}\right]^{e^x} = 2\sqrt{1+e^x}$$

$y' = \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}$, Exact solution is: $\left\{C_4 + 2\sqrt{e^x+1}\right\}$

2 $f_2(x) = \dfrac{1}{1+3e^{-x}}$

$\forall x \in \mathbb{R}, 1+3e^{-x} > 0$ donc f_2 est définie sur $\mathbb{R}$ comme inverse et somme de fonctions continues donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et en posant $t = -\ln(u)$, $dt = -\dfrac{du}{u}$ on a :

$$\int^x f_2(t)\,dt = \int^x \frac{1}{1+3e^{-t}}dt = \int^{e^{-x}} \frac{-du}{u(1+3u)} = -\int^{e^{-x}} \left(\frac{a}{u} + \frac{b}{1+3u}\right) du$$

où l'on trouve a et b par ce calcul :

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{1+3u} = \frac{a+3au+bu}{u(1+3u)}$$

et $\begin{cases} a = 1 \\ 3a+b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$ d'où :

$$\begin{aligned} \int^{e^{-x}} f_2(t)\,dt &= -\int^{e^{-x}} \left(\frac{1}{u} - \frac{3}{1+3u}\right) du = -\left[\ln(|u|) - \ln(|1+3u|)\right]^{e^{-x}} \\ &= \ln\left(\left|\frac{1+3e^{-x}}{e^{-x}}\right|\right) = \ln\left(\frac{1+3e^{-x}}{e^{-x}}\right) \\ &= \ln(e^x + 3) \end{aligned}$$

$y' = \dfrac{1}{1+3e^{-t}}$, Exact solution is: $\left\{C_2 + t + \ln\left(\dfrac{1}{e^t} + \dfrac{1}{3}\right)\right\}$ (idem)

3 $f_4(x) = x\cos(x)$.

f_4 est définie et continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions continues donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et :

$$\int^x f_4(t)\,dt = \int^x \mathrm{Re}\left(te^{it}\right)dt = \mathrm{Re}\left(\int^x te^{it}dt\right)$$

On pose $\begin{cases} u(t) = t \\ v(t) = \frac{1}{i}e^{it} \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v'(t) = e^{it} \end{cases}$ donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int^x te^{it}dt &= \left[\frac{t}{i}e^{it}\right]^x - \int^x \frac{1}{i}e^{it}dt = -ixe^{ix} + i\left[\frac{1}{i}e^{it}\right]^x \\ &= -ix(\cos(x) + i\sin(x)) + (\cos(x) + i\sin(x)) \end{aligned}$$

donc :

$$\int^x f_4(t)\,dt = x\sin(x) + \cos(x)$$

$y' = x\cos(x)$, Exact solution is: $\{C_6 + \cos x + x\sin x\}$

Corrigé de l'exercice 3 :

1 $\alpha = \arccos\left(\sin\left(5\frac{\pi}{6}\right)\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ car $\dfrac{\pi}{3} \in [0, \pi]$;

$807 = 808 - 1 = 4 \times 202 + 1$ donc $\dfrac{807\pi}{4} = 202\pi - \dfrac{\pi}{4}$ donc $\beta = \arctan\left(\tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = -\dfrac{\pi}{4}$ car $-\dfrac{\pi}{4} \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

2 Soit (E) l'équation $\arccos(x) = \arcsin(1-x)$.

L'auqtion est définie pour $\left\{\begin{array}{c} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq 1-x \leq 1 \end{array}\right.$ ie $\left\{\begin{array}{c} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{array}\right.$ donc pour $x \in [0,1]$.

Analyse : Si x vérifie (E) alors x vérifie l'équation (E') : $\sin(\arccos(x)) = \sin(\arcsin(1-x))$.
$(E') \Longleftrightarrow \sqrt{1-x^2} = 1-x \Longrightarrow 1-x^2 = (1-x)^2 \Longrightarrow (1+x)(1-x) - (1-x)^2 = 0$ donc
$(E') \Longrightarrow 2x(1-x) = 0 \Longrightarrow x = 1$ ou $x = 0$.

Synthèse : Soit $x = 1$ ou 0.

On a $\arccos(0) = \frac{\pi}{2} = \arcsin(0)$ et $\arccos(1) = 0 = \arcsin(0)$
donc (conclusion) les solutions sont 0 et 1.

3 Soit $a = \arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{5}\right)$.

Analyse : soit x tel que $\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{5}\right) = \arctan(x)$.

On calcule $\tan(a) = \dfrac{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{5}}{1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{5}} = \dfrac{\dfrac{7}{10}}{\dfrac{9}{10}} = \dfrac{7}{9}$.

On a donc $x = \tan(\arctan(x)) = \tan(a) = \dfrac{7}{9}$ donc $x = \dfrac{7}{9}$

Synthèse : Soit $x = \dfrac{7}{9}$.

On a $0 < \arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) < \arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$ et $0 < \arctan\left(\dfrac{1}{5}\right) < \arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$ (car arctan est strictement croissante) donc $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$.

On a donc $\tan(a) = \tan(x)$ et $a, x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $a = x$ donc $x = \dfrac{7}{9}$ est (l'unique) solution de l'équation.

Corrigé de l'exercice 4 : On définit une fonction f par $f(x) = \dfrac{x}{1+\ln(x)}$.

1a Déterminer l'ensemble D_f de définition de f. Vérifier que f est dérivable sur D_f et calculer $f'(x)$ pour tout x dans D_f.

ln est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $1 + \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{e}$ donc $D_f = \left]0, \dfrac{1}{e}\right[\cup \left]\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$.

De plus, $\forall x \in D_f$, $f'(x) = \dfrac{(1+\ln(x)) - 1}{(1+\ln(x))^2} = \dfrac{\ln(x)}{(1+\ln(x))^2}$.

1b Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

Sans forme indéterminée, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

1c Ainsi prolongée, f est-elle dérivable en 0 ?

On a $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{1}{1+\ln(x)}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

2a Etudier les variations de f sur son ensemble de définition ; on présentera les résultats dans un tableau précisant les limites aux différents bords.

f' est du signe de ln donc f est décroissante sur $\left[0, \frac{1}{e}\right[$, décroissante $\left]\frac{1}{e}, 1\right]$ et croissante sur $[1, +\infty[$.
D'autre part, $\lim\limits_{x \to (1/e)^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to (1/e)^+} f(x) = +\infty$.
Enfin, $f(x) = \dfrac{x}{1+\ln(x)} = \dfrac{x}{\ln(x)} \dfrac{\ln(x)}{1+\ln(x)} = \dfrac{x}{\ln(x)} \cdot \dfrac{1}{1+1/\ln(x)}$, or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\ln(x)} = +\infty$ par croissance comparée donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2b $\dfrac{x}{1+\ln(x)}$

Corrigé du problème :

Etude de fonction : Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on définit la fonction f_n sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{(\ln(x))^n}{n!x^2}$

1 Etudier les variations de la fonction f_n : on donnera la réponse sous la forme de deux tableaux de variations selon que n est pair ou impair, et on précisera les limites de f_n aux bornes de son ensemble de définition.

f_n est définie et dérivable comme quotient de fonctions qui le sont sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f_n'(x) = \dfrac{(\ln(x))^{n-1}}{n!x^3}(n - 2\ln(x))$ (après calculs).

<u>**Premier cas:**</u> n impair, alors, $n-1$ est pair donc $(\ln(x))^{n-1} \geq 0$ donc

$$f_n'(x) \geq 0 \Leftrightarrow n - 2\ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq e^{n/2}.$$

f_n est alors croissante sur $\left]0, e^{n/2}\right]$ et décroissante sur $\left[e^{n/2}, +\infty\right[$. De plus, $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = -\infty$ (sans forme indéterminée) et par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$.

<u>**Deuxième cas:**</u> n pair, alors, $n-1$ est impair donc $(\ln(x))^{n-1} \leq 0$ sur $]0, 1]$ et $n - 2\ln(x) \geq 0$ sur $]0, 1]$ donc f_n décroît sur $]0, 1]$ et pour $x \geq 1$, $(\ln(x))^{n-1} \geq 0$ donc

$$f_n'(x) \geq 0 \Leftrightarrow n - 2\ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq e^{n/2}.$$

f_n est alors décroissante sur $]0, 1]$, croissante sur $\left[1, e^{n/2}\right]$ et décroissante sur $\left[e^{n/2}, +\infty\right[$. De plus, $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = +\infty$ (sans forme indéterminée) et par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$.

2 Montrer que la valeur maximale de la fonction f_n <u>sur l'intervalle $[1, +\infty[$</u> est $y_n = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{n}{2e}\right)^n$.

La valeur maximale de la fonction f_n <u>sur l'intervalle $[1, +\infty[$</u> est donc atteinte en $x = e^{n/2}$ et vaut $y_n = f_n\left(e^{n/2}\right) = \dfrac{\left(\ln(e^{n/2})\right)^n}{n!\left(e^{n/2}\right)^2} = \dfrac{(n/2)^n}{n!e^n} = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{n}{2e}\right)^n$.

3 Montrer que $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n \leq e$ (indication: on rappelle que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$).

Pour $n \geq 1$, on a: $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = e^{n\ln(1+1/n)}$. Or $\ln(1+1/n) \leq 1/n$ donc $n\ln(1+1/n) \leq 1$ donc $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n \leq e^1 = e$.

4 En déduire que $y_{n+1} \leq \frac{1}{2}y_n$

On a $y_n > 0$ et $\dfrac{y_{n+1}}{y_n} = \dfrac{\dfrac{1}{(n+1)!}\left(\dfrac{n+1}{2e}\right)^{n+1}}{\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{n}{2e}\right)^n} = \dfrac{(n+1)\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}{2e\,(n+1)} \leq \dfrac{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}{2e} \leq \dfrac{e}{2e} \leq \dfrac{1}{2}$

donc $y_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}y_n$.

5 Montrer que $y_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} y_1$ et justifier que la suite (y_n) converge vers une limite à préciser.

$y_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} y_1$ se prouve sans difficulté par récurrence sur n, puis comme $y_n \geq 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} y_1 = 0$, le théorème d'encadrement montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$.

Etude d'intégrales On pose $I_n(x) = \int_1^x f_n(t)dt = \int_1^x \dfrac{(\ln(t))^n}{n!t^2}dt$ pour tout réel $x \in [1, +\infty[$

6 Calculer $I_1(x)$

$I_1(x) = \int_1^x \dfrac{\ln(t)}{t^2}dt$. On pose pour intégrer par parties, $u(t) = \ln(t)$ et $v(t) = -1/t$ de sorte que $u'(t) = 1/t$ et $v'(t) = 1/t^2$ et il vient:

$$I_1 = \left[-\frac{\ln(t)}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t^2}dt = -\frac{\ln(x)}{x} + [-1/t]_1^x = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x}$$

7 Montrer que, pour tout réel $x \in [1, +\infty[$, pour tout entier naturel non nul k :

$$I_{k+1}(x) = I_k(x) - \frac{(\ln(x))^{k+1}}{(k+1)!x}$$

Pour tout réel $x \in [1, +\infty[$, pour tout entier naturel non nul k, on pose pour intégrer par parties, $u(t) = \dfrac{(\ln(t))^{k+1}}{(k+1)!}$ et $v(t) = -1/t$ de sorte que $u'(t) = \dfrac{(\ln(t))^k}{k!t}$ et $v'(t) = 1/t^2$ et il vient:

$I_{k+1}(x) = \int_1^x \dfrac{(\ln(t))^{k+1}}{(k+1)!t^2}dt = \left[-\dfrac{(\ln(t))^{k+1}}{(k+1)!t}\right]_1^x + \int_1^x \dfrac{(\ln(t))^k}{k!t^2}dt = I_k(x) - \dfrac{(\ln(x))^{k+1}}{(k+1)!x}$

8 En déduire que pour tout réel $x \in [1, +\infty[$, pour tout entier naturel non nul n :

$$I_n(x) = 1 - \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln(x))^k}{k!}$$

$I_n(x) = 1 - \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln(x))^k}{k!}$ se prouve alors sans difficulté par récurrence sur $n \geq 1$.

9 Montrer que $0 \leq I_n(x) \leq (x-1)\, y_n$

y_n est la valeur maximale de la fonction f_n sur $[1, +\infty[$ et f_n est positive sur $[1, +\infty[$, donc pour $x \geq 1$, on a $\forall t \in [1, x]$, $0 \leq f_n(t) \leq y_n$ donc par intégration des inégalités,
$0 = \int_0^x 0dt \leq I_n(x) = \int_1^x f_n(t)dt \leq \int_1^x y_n dt = [ty_n]_1^x = (x-1)\, y_n$ donc $0 \leq I_n(x) \leq (x-1)\, y_n$

10 En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(x)$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$, on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} (x-1)\, y_n = 0$ et par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(x) = 0$.

11 Pour tout réel $t > 0$, on pose $U_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$.
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n(t) = e^t$. Indication: on pourra poser $x = e^t$.

On pose $x = e^t$ de sorte que $x \geq 1$ et $t = \ln(x)$, donc $U_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln(x))^k}{k!} = x\,(1 - I_n(x))$ car $I_n(x) = 1 - \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{n} \frac{\ln(x)^k}{k!}$. Donc $U_n(t) = e^t\,(1 - I_n(e^t))$
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n(t) = e^t$.