D.S.3 samedi 09 Décembre 2023

Exercice 1 : Pour tout entier naturel n non nul, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\forall x > 0,\ h_n(x) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}$$

1 Etudier pour tout n les variations (strictes) de la fonction h_n.

2 En déduire que pour tout entier naturel non nul n, l'équation $h_n(x) = 4$ admet exactement deux solutions notées u_n et v_n et vérifiant $0 < u_n < 1 < v_n$.

3a Calculer pour $x > 0, h_{n+1}(x) - h_n(x)$ (on donnera le résultat sous la forme d'un quotient en factorisant le numérateur).

3b En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $h_{n+1}(v_n) > 4$.

3c Montrer que la suite (v_n) est décroissante.

4a Montrer que la suite (v_n) converge vers un réel l.

4b En supposant $l > 1$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n^n = +\infty$. En déduire une contradiction.

4c Déterminer la limite de (v_n).

5 Trouver une relation simple entre u_n et v_n et en déduire la limite de (u_n).

Exercice 2 : On considère l'équation différentielle $(E) : (1+x)\,y' + xy = (1+x)^4 e^{-x}$.

1 Résoudre (E) sur l'intervalle I où $I =]-\infty, -1[$ ou $I =]-1, +\infty[$. On pourra remarquer que $\dfrac{x}{1+x} = 1 - \dfrac{1}{1+x}$.

2 Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : On pose, pour x, réel, $f(x) = 1 + \frac{1}{2}\arctan(x)$

1 Justifier que la fonction f est dérivable et vérifie : pour tout réel x, $0 < f'(x) \leq \frac{1}{2}$.

2 Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une et une seule solution α dans $\mathbb{R}$.
Préciser dans quel intervalle l'inégalité $f(x) \leq x$ est vérifiée.
On pose, dans la suite de l'exercice, $h(x) = \frac{1}{2}(x + \alpha)$.
On considère un réel $a \geq \alpha$ et un définit les suites (u_n) et (v_n) par les relations :

$$\begin{aligned} u_0 &= a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \\ v_0 &= a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = h(v_n) \end{aligned}$$

3 Etude de la suite (u_n).

3a Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \alpha$.

3b En déduire que la suite (u_n) est monotone et qu'elle converge.

3c Préciser la limite de la suite (u_n).

4 Calcul de v_n:

4a Exprimer $v_{k+1} - \alpha$ en fonction de $v_k - \alpha$.

4b En déduire une expression de v_n en fonction de n et α.

5 On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (u_k - \alpha)$.

5a Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

5b En déduire que la suite (S_n) converge et est de limite $L \in [0, 2(a - \alpha)]$.

Problème : Le but du problème est de déterminer des fonctions f vérifiant une équation faisant intervenir $f \circ f$.

On suppose que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et onte id_I la fonction identité de I : $\left\{ \begin{array}{l} I \to I \\ x \mapsto x \end{array} \right.$.

On pourra utiliser sans démonstration le théorème suivant (récirpoque d'un théorème du cours):

Théorème 1 : Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une application continue de I dans J. Si f est bijective, alors f est strictement monotone.

Partie A : des solutions de $f \circ f = id_I$

1 Soit f une fonction de I dans I distincte de id_I vérifiant $f \circ f = id_I$.
Montrer qu'il existe $u, v \in I$ tels que $u < v$ et $f(u) > f(v)$.

2 Déterminer les fonctions croissantes de I dans I vérifiant $f \circ f = id_I$.

3 Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x + (-1)^{\lfloor x \rfloor}$. Déterminer $f \circ f$.

4 Pour $x \in [0, 1]$, on pose $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Déterminer $f \circ f$.

5 Déterminer les fonctions affines définies sur $I = [0, 1]$ et vérifiant $f \circ f = id_I$.
Préciser lesquelles sont à valeurs dans I.

6 Soit φ une bijection de $I = [0, 1]$ dans I. On suppose que f est à valeurs dans I et $f \circ f = id_I$ et on pose $g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$. Déterminer $g \circ g$.

7 On prend encore $I = [0, 1]$. Déduire des deux questions précédentes de nouveaux exemples de fonctions $f : I \to I$ vérifiant $f \circ f = id_I$.

8 A quelle condition nécessaire et suffisante sur le graphe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction $f : I \to I$ cette fonction vérifie-t-elle $f \circ f = id_I$? (on justifiera évidemment sa réponse).
Pour $I = [0, 1]$, tracer le graphe d'une telle fonction (en faisant un graphe qui ne correspond à aucune fonction connue).

Partie B : équation $f \circ f = -id_{\mathbb{R}}$ pour f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

9 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f \circ f = -id_{\mathbb{R}}$. Justifier que f est strictement monotone.

10 En déduire qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue vérifiant $f \circ f = -id_{\mathbb{R}}$.

Partie C : équation $(f \circ f)(x) = \dfrac{x}{2} + 3$ pour f de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ (f \circ f)(x) = \dfrac{x}{2} + 3$ (condition (C)).

11 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{f(x)}{2} + 3 = f\left(\dfrac{x}{2} + 3\right)$.

12 En déduire que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f'\left(\dfrac{x}{2} + 3\right)$.

13 Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $\begin{cases} u_0 = x \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + 3 \end{cases}$.

- Rappeler le nom d'une telle suite.
- Justifier qu'il existe une et une seule valeur de x pour laquelle la suite (u_n) est constante (on note x_0 cette valeur).
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n. En déduire que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

14 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f'(x_0)$. En déduire que f est une fonction affine.

15 Déterminer les fonctions affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la condition (C).

16 Conclure.

Corrigé de l'exercice 1 : Pour tout entier naturel n non nul, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\forall x > 0,\ h_n(x) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}$$

1 Etudier pour tout n les variations de la fonction h_n.

h_n est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x > 0$, $h_n'(x) = nx^{n-1} - \dfrac{n}{x^{n+1}}$ donc

$$h_n'(x) > 0 \Leftrightarrow x^{n-1} > \frac{1}{x^{n+1}} \Leftrightarrow x^{2n} > 1 \Leftrightarrow x > 1$$

donc h_n est strictement décroissante sur $]0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

2 En déduire que pour tout entier naturel non nul n, l'équation $h_n(x) = 4$ admet exactement deux solutions notées u_n et v_n et vérifiant $0 < u_n < 1 < v_n$.

De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} h_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h_n(x) = +\infty$ et $h_n(1) = 3$.

Ainsi, h_n est continue et strictement monotone sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$ donc par (double) application du théorème de la bijection, h_n induit une bijection de $]0,1]$ sur $[3,+\infty[$ et h_n induit une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[3,+\infty[$.

Or $4 \in [3,+\infty[$ donc l'équation $h_n(x) = 4$ admet une unique solution u_n dans $]0,1]$ et une unique solution v_n dans $[1,+\infty[$. On a bien $0 < u_n < 1 < v_n$.

3a Calculer pour $x > 0, h_{n+1}(x) - h_n(x)$.

Calculons pour $x > 0$:

$$\begin{aligned}
h_{n+1}(x) - h_n(x) &= x^{n+1} + 1 + \frac{1}{x^{n+1}} - \left(x^n + 1 + \frac{1}{x^n}\right) \\
&= x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} - x^n - \frac{1}{x^n} \\
&= \frac{x^{2n+2} + 1 - x^{2n+1} - x}{x^{n+1}} \\
&= \frac{(x-1)\left(x^{2n+1} - 1\right)}{x^{n+1}}
\end{aligned}$$

3b En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $h_{n+1}(v_n) > 4$.

On a $h_n(v_n) = 4$ donc :

$$\begin{aligned}
h_{n+1}(v_n) - 4 &= h_{n+1}(v_n) - h_n(v_n) \\
&= \frac{(v_n - 1)\left(v_n^{2n+1} - 1\right)}{v_n^{n+1}} > 0
\end{aligned}$$

car $v_n > 1$ donc aussi $v_n^{2n+1} > 1$. Donc $h_{n+1}(v_n) > 4$.

3c Montrer que la suite (v_n) est décroissante.

On a donc $h_{n+1}(v_n) > 4 = h_{n+1}(v_{n+1})$ et $v_n > 1$ et h_n est croissante sur $[1,+\infty[$ donc $v_n \geq v_{n+1}$ donc (v_n) est décroissante.

4a Montrer que la suite (v_n) converge vers un réel l.

(v_n) et donc décroissante et minorée (par 1) donc convergente vers $l \geq 1$ d'après le théorème de la limite monotone.

4b En supposant $l > 1$, montrer que $\lim_{n\to+\infty} v_n^n = +\infty$. En déduire une contradiction.

Supposons $l > 1$. Alors (v_n) étant décroissante, on a pour tout $n \geq 1$: $v_n \geq l \geq 0$ donc $v_n^n \geq l^n$.
Or $\lim_{n\to+\infty} l^n = +\infty$ car $l > 1$ donc par théorème de comparaison, $\lim_{n\to+\infty} v_n^n = +\infty$.
Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{v_n^n} = 0$. Or $h_n(v_n) = v_n^n + 1 + \frac{1}{v_n^n}$ donc $\lim_{n\to+\infty} h_n(v_n) = +\infty$, absurde car $h_n(v_n) = 4$.

4c Déterminer la limite de (v_n).

On a donc $l \leq 1$. Or $l \geq 1$ par passage à la limite car pour tout n, $v_n \geq 1$. Donc $l = 1$.

5 Trouver une relation simple entre u_n et v_n et en déduire la limite de (u_n).

On a $h_n\left(\frac{1}{v_n}\right) = \frac{1}{v_n^n} + 1 + v_n^n = h_n(v_n) = 4$ et $\frac{1}{v_n} \in \left]0,1\right]$ car $v_n > 1$ donc $\frac{1}{v_n} = u_n$. Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1} = 1$.

Corrigé de l'exercice 2 : On considère l'équation différentielle $(E) : (1+x)\,y' + xy = (1+x)^4 e^{-x}$.

1 Résoudre (E) sur l'intervalle I où $I = \left]-\infty,-1\right[$ ou $I = \left]-1,+\infty\right[$.

Soit $(E_0) : (1+x)\,y' + xy = 0$ l'équation homogène associée.
Sur I, on a $(E_0) \Leftrightarrow y' + \frac{x}{1+x}y = 0$ et $(E) \Leftrightarrow y' + \frac{x}{1+x}y = (1+x)^3 e^{-x}$.
On pose $a(x) = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$; $A(x) = \int^x \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = x - \ln(|1+x|)$ donc la solution générale de (E_0) sur I est :

$$\begin{aligned} y(x) &= \lambda e^{-(x-\ln(|1+x|))} = \lambda\,|1+x|\,e^{-x},\ \lambda \in \mathbb{R} \\ &= \lambda(1+x)\,e^{-x},\ \lambda \in \mathbb{R} \text{ quitte à changer } \lambda \text{ en } -\lambda \end{aligned}$$

On cherche une solution particulière de (E) par la méthode de variation de la constante :

$$\begin{aligned} y(x) &= \lambda(x)(1+x)\,e^{-x} \\ y'(x) &= \lambda'(x)(1+x)\,e^{-x} + \lambda(x)\left(e^{-x} - (1+x)\,e^{-x}\right) \\ &= \lambda'(x)(1+x)\,e^{-x} - \lambda(x)\,xe^{-x} \\ (E) &\Leftrightarrow \lambda'(x)(1+x)\,e^{-x} - \lambda(x)\,xe^{-x} + x\lambda(x)\,e^{-x} = (1+x)^3 e^{-x} \\ &\Leftrightarrow \lambda'(x) = (1+x)^2 \end{aligned}$$

On choisit $\lambda(x) = \frac{(1+x)^3}{3}$ et $y(x) = \frac{(1+x)^4}{3}e^{-x}$ est une solution particulière de (E) sur I donc la solution générale de (E) sur I est :

$$y(x) = \frac{(1+x)^4}{3}e^{-x} + \lambda(1+x)\,e^{-x},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

$y' + \frac{x}{1+x}y = (1+x)^3 e^{-x}$, Exact solution is: $\left\{\frac{1}{3e^x}\left(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 3x\right) + C_2 e^{-x}(x+1)\right\}$

2 Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

Analyse : Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Par restriction y est solution de (E) sur I comme ci-dessus donc

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{(1+x)^4}{3}e^{-x} + \lambda(1+x)e^{-x},\ \lambda \in \mathbb{R} \text{ pour } x < -1 \\ y(x) &= \frac{(1+x)^4}{3}e^{-x} + \mu(1+x)e^{-x},\ \mu \in \mathbb{R} \text{ pour } x > -1 \\ y(-1) &= 0 \text{ vu l'équation en } -1 \end{aligned}$$

remarquons que les formules ci-dessus sont donc valables pour $x = -1$.

Synthèse : Soit y définie par :

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{(1+x)^4}{3}e^{-x} + \lambda(1+x)e^{-x},\ \lambda \in \mathbb{R} \text{ pour } x \leq -1 \\ y(x) &= \frac{(1+x)^4}{3}e^{-x} + \mu(1+x)e^{-x},\ \mu \in \mathbb{R} \text{ pour } x \geq -1 \end{aligned}$$

Il est clair vu 1.) que y est solution de (E) sur $]-\infty,-1[$ et sur $]-1,+\infty[$.

De plus :

$$\frac{y(x)-y(-1)}{x+1} = \frac{(1+x)^3}{3}e^{-x} + \alpha e^{-x} \text{ avec } \alpha = \lambda \text{ ou } \mu$$

donc $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} \frac{y(x)-y(-1)}{x+1} = \mu e^{-1}$ et $\displaystyle\lim_{x\to -1^-} \frac{y(x)-y(-1)}{x+1} = \lambda e^{-1}$ donc y est dérivable à droite et à gauche en -1 avec $y'_d(-1) = \mu e^{-1}$ et $y'_g(-1) = \lambda e^{-1}$. Or y est dérivable en -1 si et seulement si ces deux valeurs sont égales ie ssi $\lambda = \mu$. Dans ce cas, (E) est vérifiée en -1 $(0 = 0)$.

Conclusion : les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme :

$$y(x) = \frac{(1+x)^4}{3}e^{-x} + \lambda(1+x)e^{-x},\ \lambda \in \mathbb{R} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Corrigé de l'exercice 3 : On pose, pour x, réel, $f(x) = 1 + \frac{1}{2}\arctan(x)$

1 Justifier que la fonction f est dérivable et vérifie : pour tout réel x, $0 < f'(x) \leq \frac{1}{2}$.

La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable et $f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2} > 0$.

Pour tout réel x, $1 + x^2 \geq 1$ donc $0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1$ donc $0 < f'(x) < \frac{1}{2}$.

2 Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une et une seule solution α dans R.

Préciser dans quel intervalle l'inégalité $f(x) \leq x$ est vérifiée.

Posons $g(x) = f(x) - x$. La fonction g est dérivable et $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$ d'après la première question donc la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim_{x\longrightarrow -\infty}(f(x)) = 1 - \frac{\pi}{4}$ et $\lim_{x\longrightarrow +\infty}(f(x)) = 1 + \frac{\pi}{4}$ donc $\lim_{x\longrightarrow -\infty}(g(x)) = +\infty$ et $\lim_{x\longrightarrow +\infty}(g(x)) = -\infty$. La fonction g est strictement décroissante et continue sur $\mathbb{R}$. Elle induit donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $g(\mathbb{R}) = \left]\displaystyle\lim_{x\longrightarrow +\infty}(g(x)), \lim_{x\longrightarrow -\infty}(g(x))\right[= \mathbb{R}$. De plus $0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation$g(x) = 0$, et donc l'équation $f(x) = x$ admettent une et une seule solution α dans $\mathbb{R}$. Les variations de g:

$$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & \alpha & & +\infty \\ \hline & +\infty & \searrow & & & \\ g(x) & & & 0 & & \\ & & & & \searrow & -\infty \end{array}$$

entraînent que $g(x) \leq 0$, c'est-à-dire $f(x) \leq x$ si et

seulement si $x \geq \alpha$.
On pose, dans la suite de l'exercice, $h(x) = \frac{1}{2}(x + \alpha)$.
On considère un réel $a \geq \alpha$ et un définit les suites (u_n) et (v_n) par les relations :

$$\begin{aligned} u_0 &= a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \\ v_0 &= a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = h(v_n) \end{aligned}$$

3 Etude de la suite (u_n).

3a Montrer que pour tout $n \in N$, $u_n \geq \alpha$.

La fonction f est continue et croissante sur $[\alpha, +\infty[$ donc $f([\alpha, +\infty[) = \left[f(\alpha), \lim_{x \to +\infty}(f(x))\right[= \left[\alpha, 1 + \frac{\pi}{4}\right[\subset [\alpha, +\infty[$. De plus, $u_0 \in [\alpha, +\infty[$ donc une récurrence sans difficultés montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [\alpha, +\infty[$

3b En déduire que la suite (u_n) est monotone et qu'elle converge.

D'après la question 2, $f(x) \leq x$ pour $x \geq \alpha$ et d'après la question 3, $u_n \in [\alpha, +\infty[$ donc $f(u_n) \leq u_n$ donc $u_{n+1} \leq u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante. Elle est, de plus, minorée par α donc converge vers $l \in [\alpha, +\infty[$.

3c Préciser la limite de la suite (u_n).

On passe à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$. D'une part, $\lim_{n \longrightarrow \infty} u_{n+1} = l$ car (u_{n+1}) est extraite de (u_n). D'autre part, $\lim_{n \longrightarrow \infty} u_n = l$ et $\lim_{x \longrightarrow l} f(x) = f(l)$ car la fonction f est continue. D'après le théorème de composition des limites, $\lim_{n \longrightarrow \infty} f(u_n) = f(l)$. D'où $f(l) = l$ et d'après la question 2, $l = \alpha$.

4 Calcul de v_n:

4a Exprimer $v_{k+1} - \alpha$ en fonction de $v_k - \alpha$.

$v_{k+1} - \alpha = h(v_k) - \alpha = \frac{1}{2}(v_k + \alpha) - \alpha = \frac{1}{2}(v_k - \alpha)$.

4b En déduire une expression de v_n en fonction de n et α.

La suite $(v_n - \alpha)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ donc $v_n - \alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^n (a - \alpha)$. On en déduit que $v_n = \alpha + \left(\frac{1}{2}\right)^n (a - \alpha)$.

5 On pose, pour tout $n \in N$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} (u_k - \alpha)$.

5a Montrer que pour tout $n \in N$, $u_n \leq v_n$.

Remarquons d'abord que $f \leq h$ sur l'intervalle $[\alpha, +\infty[$: Soit $g_1 = f - h$. La fonction g_1 est dérivable et $g_1'(x) = f'(x) - h'(x) = f'(x) - \frac{1}{2} < 0$. De plus $g_1(\alpha) = 0$ donc $g_1(x) \leq 0$ sur l'intervalle $[\alpha, +\infty[$.

Montrer par récurrence que $u_n \leq v_n$. D'une part, $u_0 = v_0 = a$. Supposons que $u_n \leq v_n$ alors $f(u_n) \leq f(v_n) \leq h(v_n)$ car $f \leq h$ sur l'intervalle $[\alpha, +\infty[$ et $\alpha \leq u_n$.

5b En déduire que la suite (S_n) converge et est de limite $L \in [0, 2(a - \alpha)]$.

$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} (u_k - \alpha) = \sum_{k=0}^{n} (u_k - \alpha) + (u_{n+1} - \alpha) = S_n + (u_{n+1} - \alpha)$, et $u_{n+1} \geq \alpha$ donc

$S_{n+1} \geq S_n$ donc la suite (S_n) est croissante.
De plus, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (u_k - \alpha) \leq \sum\limits_{k=0}^{n} (v_k - \alpha) = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k (a - \alpha) = (a - \alpha) \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$
donc $S_n = (a - \alpha) \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2(a - \alpha) \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \leq 2(a - \alpha)$.
La suite (S_n) est croissante et majorée (par $2(a - \alpha)$); elle converge donc vers $L \leq 2(a - \alpha)$.
De plus, pour tout n, $S_n \geq 0$ donc par passage à la limite, $L \geq 0$.
Ainsi, $L \in [0, 2(a - \alpha)]$.

Corrigé du problème : Le but du problème est de déterminer des fonctions f vérifiant une équation faisant intervenir $f \circ f$.

On suppose que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et onte id_I la fonction identité de I : $\left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow I \\ x \mapsto x \end{array} \right.$.

On pourra utiliser sans démonstration le théorème suivant (récirpoque d'un théorème du cours):
Théorème 1 : Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une application continue de I dans J. Si f est bijective, alors f est strictement monotone.

Partie A : des solutions de $f \circ f = id_I$

1 Soit f une fonction de I dans I distincte de id_I vérifiant $f \circ f = id_I$.
Montrer qu'il existe $u, v \in I$ tels que $u < v$ et $f(u) > f(v)$.
Puisque $f \neq id_I$, il existe $x \in I$ tel que $f(x) \neq x$ donc soit $f(x) > x$ soit $f(x) < x$.
De plus $f(f(x)) = x$ donc :

- si $f(x) < x$, on prend $u = f(x)$ et $v = x$. On a $u < v$ et $f(u) = f(f(x)) = x > f(x) = v$.
- si $f(x) > x$, on prend $u = x$ et $v = f(x)$. On a $u < v$ et $f(u) = f(x) = v > x = f(f(x)) = f(v)$.

2 Déterminer les fonctions croissantes de I dans I vérifiant $f \circ f = id_I$.
Il y a bien sûr $f = id_I$ mais pas d'autre solution d'après 1 car 1 montre qu'une telle fonction ne peut être croissante.
id_I est donc l'unique solution.

3 Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x + (-1)^{\lfloor x \rfloor}$. Déterminer $f \circ f$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= f(x) + (-1)^{\lfloor f(x) \rfloor} = x + (-1)^{\lfloor x \rfloor} + (-1)^{\left\lfloor x + (-1)^{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor} \\ &= x + (-1)^{\lfloor x \rfloor} + (-1)^{\lfloor x \rfloor + (-1)^{\lfloor x \rfloor}} \quad \text{car } (-1)^{\lfloor x \rfloor} \in \mathbb{Z} \\ &= x + (-1)^{\lfloor x \rfloor} + (-1)^{\lfloor x \rfloor} (-1)^{(-1)^{\lfloor x \rfloor}} \end{aligned}$$

Or $(-1)^{\lfloor x \rfloor} = \pm 1$ d'où :

- si $(-1)^{\lfloor x \rfloor} = 1$, $f(f(x)) = x + 1 + 1.(-1)^1 = x$
- si $(-1)^{\lfloor x \rfloor} = -1$, $f(f(x)) = x - 1 + (-1).(-1)^{-1} = x - 1 + 1 = x$

Donc $f \circ f = id_{\mathbb{R}}$.

4 Pour $x \in [0,1]$, on pose $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Déterminer $f \circ f$.

Soit $x \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= \sqrt{1-(f(x))^2} = \sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{1-(1-x^2)} = \sqrt{x^2} = x \text{ car } x \geq 0 \end{aligned}$$

donc $f \circ f = id_{[0.1]}$.

5 Déterminer les fonctions affines définies sur $I = [0,1]$ et vérifiant $f \circ f = id_I$.

Préciser lesquelles sont à valeurs dans I.

Soit $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= a(f(x)) + b = a(ax+b) + b \\ &= a^2 x + ab + b \end{aligned}$$

Si $\left\{ \begin{array}{c} a^2 = 1 \\ ab + b = 0 \end{array} \right.$, alors $f \circ f = id_I$. La réciproque est vraie car on obtient ces relations en prenant $x = 0$ puis $x = 1$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} f \circ f &= id_I \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a^2 = 1 \\ ab + b = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a = \pm 1 \\ b(1+a) = 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a = 1 \\ b = 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{c} a = -1 \\ b \text{ quelconque} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Conclusion : les fonctions affines vérifiant $f \circ f = id_I$ sont $f = id_I$ et celles définies par $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = -x + b$, $b \in \mathbb{R}$.

Mais si l'on impose en plus que f soit à valeurs dans I, il reste $f = id_I$ et $f(x) = 1 - x$ car pour toute autre valeur de b, f n'est plus à valeurs dans I.

6 Soit φ une bijection de $I = [0,1]$ dans I. On suppose que f est à valeurs dans I et $f \circ f = id_I$ et on pose $g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$. Déterminer $g \circ g$.

On a :

$$\begin{aligned} g \circ g &= \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi \\ &= \varphi^{-1} \circ f \circ id_I \circ f \circ \varphi \\ &= \varphi^{-1} \circ f \circ f \circ \varphi \\ &= \varphi^{-1} \circ id_I \circ \varphi \\ &= \varphi^{-1} \circ \varphi = id_I \end{aligned}$$

7 On prend encore $I = [0,1]$. Déduire des deux questions précédentes de nouveaux exemples de fonctions $f : I \to I$ vérifiant $f \circ f = id_I$.

Donnons une infinité d'exemple en prenant pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(x) = x^n$ (bijective de I sur I avec $\varphi^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$) et $f(x) = 1 - x$.

Alors $g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$ vérifie encore $g \circ g = id_I$ d'après 6 et plus explicitement on a pour tout $x \in [0,1]$:

$$g(x) = \sqrt[n]{f(x^n)} = \sqrt[n]{1 - x^n}$$

8 A quelle condition nécessaire et suffisante sur le graphe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction $f : I \to I$ cette fonction vérifie-t-elle $f \circ f = id_I$? (on justifiera évidemment sa réponse).
Pour $I = [0,1]$, tracer le graphe d'une telle fonction (en faisant un graphe qui ne correspond à aucune fonction connue).
D'après le théorème de caractérisation des bijections, $f : I \to I$ vérifie $f \circ f = id_I$ si et seulement si f est bijective de I sur I et $f^{-1} = f$ donc si et seulement si f est bijective de I sur I et $\mathcal{C}_f = \mathcal{C}_{f^{-1}}$. Or $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ est le symétrique de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\Delta : y = x$ donc la condition cherchée est que $\mathcal{C}_f$ soit symétrique par rapport à $\Delta : y = x$.

Partie B : équation $f \circ f = -id_{\mathbb{R}}$ pour f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

9 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f \circ f = -id_{\mathbb{R}}$. Justifier que f est strictement monotone.
Si $f \circ f = -id_{\mathbb{R}}$, alors $f \circ f \circ f \circ f = -id_{\mathbb{R}} \circ (-id_{\mathbb{R}}) = id_{\mathbb{R}}$ donc d'après le théorème de caractérisation des bijections, f est bijective (et $f^{-1} = f \circ f \circ f$).
Donc f est continue et bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème1, f est strictement monotone.

10 En déduire qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue vérifiant $f \circ f = -id_{\mathbb{R}}$.
Que f soit strictement croissante ou strictement décroissante, il en résulte que $f \circ f$ est croissante, ce qui n'est pas compatible avec $f \circ f = -id_{\mathbb{R}}$.

Partie C : équation $(f \circ f)(x) = \dfrac{x}{2} + 3$ pour f de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f \circ f)(x) = \dfrac{x}{2} + 3$ (condition (C)).

11 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{f(x)}{2} + 3 = f\left(\dfrac{x}{2} + 3\right)$.
On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{2}+3\right) &= f\left((f \circ f)(x)\right) \text{ d'après } (C) \\ &= (f \circ f \circ f)(x) \\ &= (f \circ f)(f(x)) \\ &= \frac{f(x)}{2} + 3 \text{ d'après } (C) \end{aligned}$$

12 En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f'\left(\dfrac{x}{2} + 3\right)$.
Il suffit de dériver la relation précédente (tout est dérivable comme composée de fonctions dérivables)

13 Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $\begin{cases} u_0 = x \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + 3 \end{cases}$.

- Rappeler le nom d'une telle suite.
  C'est une suite arithmético-géométrique.
- Justifier qu'il existe une et une seule valeur de x pour laquelle la suite (u_n) est constante (on note x_0 cette valeur).
  On a :
  $$u_{n+1} = u_n \Leftrightarrow \frac{u_n}{2} + 3 = u_n \Leftrightarrow u_n = 6$$
  donc $x_0 = 6$ est l'unique valeur de $u_0 = x$ pour laquelle la suite (u_n) est constante.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n. En déduire que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.
  On pose $v_n = u_n - 6$ et on a pour tout entier n :
  $$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{u_n}{2} + 3 - \left(\frac{6}{2} + 3\right) = \frac{u_n - 6}{2} = \frac{v_n}{2}$$
  donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ donc $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n v_0$ donc :
  $$u_n = 6 + \left(\frac{1}{2}\right)^n (x - 6)$$
  Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6$.

14 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f'(x_0)$. En déduire que f est une fonction affine.
On continue de raisonner avec x fixé.
Or f' est continue en tout point donc en $x_0 = 6$ car f est de classe $\mathcal{C}^1$ donc par composition de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} f'(u_n) = f'(x_0)$. Mais pour tout t, $f'(t) = f'\left(\frac{t}{2} + 3\right)$ donc $f'(u_n) = f'\left(\frac{u_n}{2} + 3\right) = f'(u_{n+1})$.
Donc la suite $(f'(u_n))$ est constante donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f'(u_n) = f'(u_0) = f'(x)$.
Donc par unicité de la limite :
$$f'(x) = f'(x_0)$$

Ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc par primitivation, on a :
$$f(x) = f'(x_0)\, x + c,\ \ c \in \mathbb{R}$$
donc f est une fonction affine.

15 Déterminer les fonctions affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la condition (C).
Soit f affine, donc de la forme $f(x) = ax + b$.
f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f(f(x)) = af(x) + b = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b$$
Ceci est égal à $\frac{x}{2} + 3$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\begin{cases} a^2 = \frac{1}{2} \\ ab + b = 3 \end{cases}$. Or :
$$\begin{cases} a^2 = \frac{1}{2} \\ ab + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ b = \frac{3}{1+a} \end{cases}$$
donc les deux fonctions affines solutions sont données par :
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{3}{1 + 1/\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{3\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$$
et
$$f(x) = \frac{-1}{\sqrt{2}}x + \frac{3}{1 - 1/\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}x + \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$$

16 Conclure.

Les questions 11 à 14 forment une analyse, la question 15 la synthèse.

En conclusion, les fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant la condition (C) sont les deux fonctions affines explicitées ci-dessus.