D.S.4 samedi 27 Janvier 2024

Exercice 1 : Soient x, y des réels. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \; I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1 Calculer A^2. En déduire A^k pour $k \in \mathbb{N}$.

2 Calculer B^2. En déduire B^k pour $k \in \mathbb{N}$.

3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $(xA + yB)^n$. Le résultat sera donné sous la forme d'une combinaison linéaire de A et B.

4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $(xI_3 + yB)^n$. Le résultat sera donné sous la forme d'une combinaison linéaire de I_3 et B.

Exercice 2 : Cet exercice est à privilégier si vous êtes en milieu ou en bas de classement en maths. Si vous êtes en tête de classe : faites d'abord les autres exercices. Si vous bloquez dans tous les autres exos (ou si avez tout fait...), vous pouvez finir par cet exo facile.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs réelles telle que

$$\forall x \geq 0, f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

1 Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$: tableau de variations en précisant les limites ou valeurs aux bornes.

2a Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.

2b Montrer que $\forall x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$.

2c Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{3}{4} |u_n - 1|$

2d En déduire pour $n \in \mathbb{N}$, une majoration de $|u_n - 1|$ en fonction de n

2e En déduire la convergence et la limite de (u_n).

3 Représenter sur un graphe la fonction f sur $\mathbb{R}^+$ et le comportement de la suite (u_n)

Exercice 3 : Soit un réel $\alpha > 0$ et $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction deux fois dérivable et vérifiant les hypothèses suivantes :

- g est bornée
- $g'' \geq \alpha g$

1 Justifier que g' est croissante.

2 Soit $a \geq 0$.

2a Montrer que pour tout réel $x > 0$:

$$g(x) \geq g(a) + g'(a)(x - a)$$

2b En déduire que $g'(a) \leq 0$.

2c Montrer que g' admet une limite réelle $l \leq 0$ en $+\infty$.

2d Montrer que pour tout réel $x > 0$:

$$g(x) \leq g(0) + lx$$

Indication : utiliser les accroissements finis.

2e En déduire que $l = 0$.

3a Donner le sens de variations de g et justifier que g admet une limite réelle $l_1 \geq 0$ en $+\infty$.

3b Montrer que pour tout réel $x > 0$:

$$g'(x) - g'(0) \geq \alpha l_1 x$$

3c En déduire que $l_1 = 0$.

4 On pose $\varphi = (g')^2 - \alpha g^2$.

4a Donner le sens de variations de φ et en déduire que pour tout réel $x > 0$:

$$g'(x) \leq -\sqrt{\alpha} g(x)$$

4b Montrer que pour tout réel $x > 0$:

$$g(x) \leq g(0) e^{-\sqrt{\alpha} x}$$

On pourra étudier une fonction annexe f.

Exercice 4 : Soit a un entier naturel et P_a la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ P_a(t) = t^3 - t\left(a^2 + 2a\right) + 2$$

On suppose que P_a possède trois racines $\boxed{\textit{dans } \mathbb{Z}}$.
Soient t_1, t_2, t_3 les trois racines de P_a avec $t_1 \leq t_2 \leq t_3$ et $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{Z}$ (les racines sont éventuellement répétées si elles sont multiples, autant de fois que leur multiplicité).

1 Que valent $t_1 + t_2 + t_3$ et $t_1 t_2 t_3$?

2 Calculer $P_a(0)$ et en déduire que $t_1 < 0$.

3 Déduire du 1.) et du 2.) que $t_1 < 0 < t_2 \leq t_3 < -t_1$ puis les valeurs de t_1, t_2, t_3.

4 Montrer sans calculs que $P'_a(t_2) = 0$. En déduire les valeurs possibles de a.

Exercice 5 : On pose pour tout entier naturel $n \geq 1$, $I_n = \left]n\pi - \dfrac{\pi}{2}, n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$.

1 Montrer que pour tout $n \geq 1$, l'équation $\tan(x) = \ln(x)$ admet une unique solution x_n dans l'intervalle I_n.

2a Préciser $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Donner un équivalent simple de x_n en $+\infty$.

2b Montrer que $\ln(x_n) \sim_{+\infty} \ln(n)$

3 Montrer que $x_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + o_{n\to+\infty}(1)$.

4 On pose $y_n = x_n - n\pi - \dfrac{\pi}{2}$. Calculer $\tan(y_n)$ pour en donner un équivalent simple ne faisant plus intervenir x_n.
Justifier que $\tan(y_n) \sim_{+\infty} y_n$. En déduire que :

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{\ln(n)} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$$

pour un certain α à déterminer.

5 Question difficile. On pose $z_n = x_n - n\pi - \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\alpha}{\ln(n)}$. Montrer que :

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{\ln(n)} + \frac{\beta}{(\ln(n))^2} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{(\ln(n))^2}\right)$$

pour un certain β à déterminer.

Exercice 6 : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul vérifiant $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.

1 Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de P. Montrer que z^2 est racine de P.

2 Montrer que les racines complexes sont soit nulles, soit de module 1.

3 Montrer que 0 n'est pas racine de P.

4 Déterminer les polynômes vérifiant $P(X^2) = P(X)P(X-1)$

Corrigé de l'exercice 1 : Soient x, y des réels. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \ I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1 Calculer A^2. En déduire A^k pour $k \in \mathbb{N}$.

On a $A^2 = (0)$. On en déduit :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ A^k = \begin{cases} I_3 \text{ si } k = 0 \\ A \text{ si } k = 1 \\ (0) \ \text{ si } k \geq 2 \end{cases}$$

2 Calculer B^2. En déduire B^k pour $k \in \mathbb{N}$.

On a $B^2 = 3B$. Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que $B^k = 3^{k-1}B$:

- Initialisation : $B^1 = 3^{1-1}B$.
- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $B^k = 3^{k-1}B$. Alors :

$$B^k = B^k B = \left(3^{k-1}B\right) B = 3^{k-1}B^2 = 3^{k-1}3B = 3^k B$$

- Conclusion :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ B^k = \begin{cases} I_3 \text{ si } k = 0 \\ 3^{k-1}B \text{ si } k \geq 1 \end{cases}$$

3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $(xA + yB)^n$. Le résultat sera donné sous la forme d'une combinaison linéaire de A et B.

Observons que l'on a $AB = BA = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix} = 3A.$

Ceci entraine que $(xA)(yB) = xy(AB) = xy(BA) = (yB)(xA)$, on peut donc appliquer le binôme de Newton.

Pour $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} (xA + yB)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (xA)^k (yB)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} A^k B^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} A^k B^{n-k} \text{ car } A^k = (0) \ \text{ pour } k \geq 2 \\ &= y^n B^n + nxy^{n-1}AB^{n-1} \\ &= y^n 3^{n-1}B + nxy^{n-1}3^{n-2}AB \text{ car } n-1 \geq 1 \ (n \geq 2) \\ &= y^n 3^{n-1}B + nxy^{n-1}3^{n-1}A \text{ car } AB = 3A \end{aligned}$$

On remarque que cette égalité est encore vraie pour $n = 1$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ (xA + yB)^n = 3^{n-1}\left(nxy^{n-1}A + y^n B\right)$$

4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $(xI_3 + yB)^n$. Le résultat sera donné sous la forme d'une combinaison linéaire de I_3 et B.

Puisque xI_3 et yB commutent, on peut encore appliquer le binôme de Newton et on a :

$$\begin{aligned}(xI_3 + yB)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (yB)^k (xI_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k x^{n-k} B^k \\ &= x^n I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} y^k x^{n-k} 3^{k-1} B \text{ car } B^k = 3^{k-1}B \text{ pour } k \geq 1\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} y^k x^{n-k} 3^{k-1} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (3y)^k x^{n-k} = \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (3y)^k x^{n-k} - x^n \right) \\ &= \frac{1}{3} \left((x+3y)^n - x^n \right)\end{aligned}$$

Donc :

$$(xI_3 + yB)^n = x^n I_3 + \frac{1}{3} \left((x+3y)^n - x^n \right) B$$

Corrigé de l'exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs réelles telle que $\forall x \geq 0,\ f(x) = \dfrac{2x+1}{x+2}$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in N,\ u_{n+1} = f(u_n)$

1 Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$: tableau de variations en précisant les limites ou valeurs aux bornes.

f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f'(x) = \dfrac{2(x+2) - 2x - 1}{(x+2)^2} = \dfrac{3}{(x+2)^2} \geq 0$ d'où le tableau :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$1/2$	$\nearrow$	$+2$

2a Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1]$.

Récurrence sur n : pour $n = 0$, c'est vrai

Supposons que pour un certain n, $u_n \in [0,1]$. f est croissante sur $[0,1]$ donc $f(0) \leq f(u_n) \leq f(1)$ donc $\dfrac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$ donc $u_{n+1} \in [0,1]$.

2b Montrer que $\forall x \in [0,1],\ |f'(x)| \leq \dfrac{3}{4}$.

Pour tout $x \in [0,1]$, $4 \leq (x+2)^2$ donc $0 \leq \dfrac{3}{(x+2)^2} \leq \dfrac{3}{4}$ donc $|f'(x)| \leq \dfrac{3}{4}$.

2c Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 1| \leq \dfrac{3}{4} |u_n - 1|$

f est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1]$, $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$ donc d'après l'inégalité des accroissements finis, on en déduit que f est $\frac{3}{4}$-lipschitzienne sur $[0,1]$, c'est-à dire pour tous $x, x' \in [0,1]$:

$$|f(x) - f(x')| \leq \frac{3}{4}|x - x'|$$

donc pour $x = u_n$ et $x' = 1$ on obtient (vu que $f(1) = 1$) :

$$|u_{n+1} - 1| \leq \frac{3}{4}|u_n - 1|$$

2d En déduire pour $n \in \mathbb{N}$, une majoration de $|u_n - 1|$ en fonction de n

Par récurrence, on déduit facilement que :

$$|u_n - 1| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - 1|$$

2e En déduire la convergence et la limite de (u_n).

Vu que $0 \leq \frac{3}{4} < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ donc par encadrement $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

3 Représenter sur un graphe la fonction f sur $\mathbb{R}^+$ et le comportement de la suite (u_n)

Corrigé de l'exercice 3 : Soit un réel $\alpha > 0$ et $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction deux fois dérivable et vérifiant les hypothèses suivantes :

- g est bornée
- $g'' \geq \alpha g$

1 Justifier que g' est croissante.
$\alpha > 0$ et g est à valeurs positives donc $g'' \geq \alpha g \geq 0$ donc g est convexe sur $\mathbb{R}^+$, et en particulier g' est croissante (aussi directement car $g'' \geq 0$).

2 Soit $a \geq 0$.

2a Montrer que pour tout réel $x > 0$:

$$g(x) \geq g(a) + g'(a)(x - a)$$

g est convexe donc au-dessus de ses tangentes. Or $T_a : y = g(a) + g'(a)(x - a)$ est l'équation de la tangente au point d'abcisse a donc pour tout $x > 0$:

$$g(x) \geq g(a) + g'(a)(x - a)$$

2b En déduire que $g'(a) \leq 0$.
Supposons $g'(a) > 0$. Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} (g(a) + g'(a)(x - a)) = +\infty$ donc par théorème de comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, ce qui contredit que g est bornée. Absurde. Donc $g'(a) \leq 0$.

2c Montrer que g' admet une limite réelle $l \leq 0$ en $+\infty$.

On a montré que g' est croissante et majorée par 0 donc d'après le théorème de la limite monotone, g' admet une limite réelle $l \leq 0$ en $+\infty$.

2d Montrer que pour tout réel $x > 0$:

$$g(x) \leq g(0) + lx$$

Indication : utiliser les accroissements finis.

Soit $x > 0$. g est dérivable sur $]0, x[$ et continue sur $[0, x]$ donc d'après l'égalité des accroissements finis, il existe $c \in]0, x[$ tel que :

$$g(x) - g(0) = xg'(c)$$

Or $g'(c) \leq l$ car g' est croissante de limite l donc :

$$g(x) \leq g(0) + lx$$

2e En déduire que $l = 0$.

Supposons $l < 0$. Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} (g(0) + lx) = -\infty$ donc par théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, contredisant encore que g est bornée. Donc $l \geq 0$. Mais on savait déjà que $l \leq 0$. Donc $l = 0$.

3a Donner le sens de variations de g et justifier que g admet une limite réelle $l_1 \geq 0$ en $+\infty$.

On a obtenu pour tout x, $g'(x) \leq 0$ donc g est décroissante. Or g est à valeurs positives donc minorée par 0, donc d'après le théorème de la limite monotone, elle admet une limite réelle $l_1 \geq 0$ en $+\infty$.

3b Montrer que pour tout réel $x > 0$:

$$g'(x) - g'(0) \geq \alpha l_1 x$$

On applique cette fois l'égalité des accroissements à g' (continue sur $[0, x]$, dérivable sur $]0, x[$) donc il existe $c \in]0, x[$ tel que :

$$g'(x) - g'(0) = xg''(c) \geq \alpha x g(c)$$

Or $g(c) \geq l_1$ d'après $3a$ donc $g'(x) - g'(0) \geq \alpha l_1 x$.

3c En déduire que $l_1 = 0$.

Supposons $l_1 > 0$, alors par théorème de minoration, on en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x) = +\infty$ contredisant que g' est négative. Donc $l_1 = 0$.

4 On pose $\varphi = (g')^2 - \alpha g^2$.

4a Donner le sens de variations de φ et en déduire que pour tout réel $x > 0$:

$$g'(x) \leq -\sqrt{\alpha} g(x)$$

φ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $x > 0$:

$$\varphi'(x) = 2g'(x) g''(x) - 2\alpha g(x) g'(x) = 2g'(x)(g'' - \alpha g)(x) \leq 0$$

donc φ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Or $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = 0$ par somme de limites. Donc $\forall x > 0$, $\varphi(x) \geq 0$ donc $g'^2(x) \geq \alpha g^2(x)$ donc :

$$g'(x) = -|g'(x)| = -\sqrt{g'^2(x)} \leq -\sqrt{\alpha g^2(x)} = -\sqrt{\alpha}\,|g(x)| = -\sqrt{\alpha} g(x)$$

4b Montrer que pour tout réel $x > 0$:

$$g(x) \leq g(0)\, e^{-\sqrt{\alpha}x}$$

On pourra étudier une fonction annexe f.

On pose $f(x) = g(x)\, e^{\sqrt{\alpha}x}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = g'(x)\, e^{\sqrt{\alpha}x} + \sqrt{\alpha} g(x)\, e^{\sqrt{\alpha}x} = \left(g'(x) + \sqrt{\alpha} g(x)\right) e^{\sqrt{\alpha}x} \leq 0$$

donc f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Or $f(0) = g(0)$ donc pour tout $x > 0$:

$$g(x)\, e^{\sqrt{\alpha}x} \leq g(0) \text{ donc } g(x) \leq g(0)\, e^{-\sqrt{\alpha}x}$$

Corrigé de l'exercice 4 :

On suppose que P_a possède trois racines $\boxed{\textit{dans } \mathbb{Z}}$.

Soient t_1, t_2, t_3 les trois racines de P_a avec $t_1 \leq t_2 \leq t_3$ et $t_1, t_2, t_3 \in Z$ (les racines sont éventuellement répétées si elles sont multiples, autant de fois que leur multiplicité).

1 Que valent $t_1 + t_2 + t_3$ et $t_1 t_2 t_3$?

D'près les relations coefficients-racines, on a :

$$t_1 + t_2 + t_3 = 0 \text{ et } t_1 t_2 t_3 = -2$$

2 Calculer $P_a(0)$ et en déduire que $t_1 < 0$.

On a $P_a(0) = 2$ et $\lim_{x\to-\infty} P_a(x) = -\infty$ donc il existe $x_0 < 0$ tel que $P_a(x_0) < 0$.

Ainsi, P_a est continue sur $[x_0, 0]$, et change de signe entre 0 et x_0 donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, P_a admet une racine dans $]x_0, 0[$, donc une racine négative. Donc $t_1 < 0$.

3 Déduire du 1.) et du 2.) que $t_1 < 0 < t_2 \leq t_3 < -t_1$ puis les valeurs de t_1, t_2, t_3.

Sachant que $t_1 + t_2 + t_3 = 0$, les trois racines ne peuvent être toutes négatives. Donc $t_3 > 0$. De plus $t_1 t_2 t_3 < 0$ et $t_1 t_3 < 0$ donc $t_2 > 0$.

Enfin, $t_1 + t_3 = -t_2 < 0$ donc $t_3 < -t_1$. Donc

$$t_1 < 0 \leq t_2 \leq t_3 < -t_1$$

4 Montrer sans calculs que $P_a'(t_2) = 0$. En déduire les valeurs possibles de a.

Puisque $t_1 t_2 t_3 = -2$ et que $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{Z}$, aucune des trois racines n'est supérieure à 2 en valeur absolue et seule l'une d'elle peut avoir pour valeur absolue 2. Ensuite, l'une d'elles a bien pour valeur absolue 2 car sinon le produit vaudrait ± 1. Enfin, $0 \leq t_2 \leq t_3 < -t_1$ montre que la plus grande en valeur absolue est t_1. Donc $t_1 = -2$ et il vient $t_2 = t_3 = 1$.

Donc t_2 est une racine double donc $P_a'(t_2) = 0$ d'après la caractérisation des racines multiples.

Ainsi, on a :

$$P_a(t) = (t-1)^2(t+2) = \left(t^2 - 2t + 1\right)(t+2) = t^3 - 3t + 2$$

donc $a^2 + 2a = 3$ donc $a = 1$ car $a \in \mathbb{N}$.

Corrigé de l'exercice 5 : On pose pour tout entier naturel $n \geq 1$, $I_n = \left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.

1 Montrer que pour tout $n \geq 1$, l'équation $\tan(x) = \ln(x)$ admet une unique solution x_n dans l'intervalle I_n.

Soit $n \geq 1$ fixé. On pose $g_n(x) = \tan(x) - \ln(x)$. g_n est dérivable sur I_n et

$$\forall x \in I_n,\ g_n'(x) = 1 + \tan^2(x) - \frac{1}{x}$$

Or pour $n \geq 1$, $x \geq \frac{\pi}{2} > 0$ donc $\frac{1}{x} \leq \frac{2}{\pi} < 1$ donc $1 - \frac{1}{x} > 0$ donc $g_n'(x) > 0$.

De plus, sans forme indéterminée (car ln est bornée sur I_n), $\lim\limits_{x \to \left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)^+} g_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^-} g_n(x) = +\infty$.

Ainsi, g_n est continue et strictement croissante sur I_n donc d'après le théorème de la bijection, g_n induit une bijection de I_n sur $]-\infty, +\infty[$ qui contient bien sûr 0, lequel admet donc un unique antécédent dans I_n par g_n.

Donc l'équation $\tan(x) = \ln(x)$ admet une unique solution x_n dans I_n.

2a Préciser $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$. Donner un équivalent simple de x_n en $+\infty$.

On a $x_n \geq n\pi - \frac{\pi}{2}$ donc par théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$.

Mieux, $n\pi - \frac{\pi}{2} \leq x_n \leq n\pi + \frac{\pi}{2}$ donc $1 - \frac{1}{2n} \leq \frac{x_n}{n\pi} \leq 1 + \frac{1}{2n}$ donc par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x_n}{n\pi} = 1$ donc $x_n \sim_{+\infty} n\pi$.

2b Montrer que $\ln(x_n) \sim_{+\infty} \ln(n)$.

On a donc $x_n = n\pi + o_{+\infty}(n)$

$$\frac{\ln(x_n)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n\pi + o_{+\infty}(n))}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln(\pi + o_{+\infty}(1))}{\ln(n)} = 1 + \frac{O_{+\infty}(1)}{\ln(n)}$$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln(x_n)}{\ln(n)} = 1$ donc $\ln(x_n) \sim_{+\infty} \ln(n)$.

3 Montrer que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o_{n \to +\infty}(1)$.

On a pour tout $n \geq 1$, $\tan(x_n - n\pi) = \tan(x_n) = \ln(x_n)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(x_n) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \tan(x_n - n\pi) = +\infty$.

Or $\lim\limits_{X \to +\infty} \arctan(X) = \frac{\pi}{2}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \arctan(\tan(x_n - n\pi)) = \frac{\pi}{2}$.

Mais $x_n - n\pi \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\arctan(\tan(x_n - n\pi)) = x_n - n\pi$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_n - n\pi) = \frac{\pi}{2}$. Donc $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o_{n \to +\infty}(1)$.

4 On pose $y_n = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$. Calculer $\tan(y_n)$ pour en donner un équivalent simple ne faisant plus intervenir x_n.

Justifier que $\tan(y_n) \sim_{+\infty} y_n$. En déduire que :

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{\ln(n)} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$$

pour un certain α à déterminer.
On a :

$$\tan(y_n) = \tan\left(x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \tan\left(x_n - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(x_n - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x_n - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{-1}{\tan(x_n)}$$

($\tan(x_n) \neq 0$ car $\tan(x_n) = \ln(x_n)$ et $x_n \geq \frac{\pi}{2} > 1$). Donc :

$$\tan(y_n) = \frac{-1}{\ln(x_n)} \sim_{+\infty} \frac{-1}{\ln(n)} \text{ d'après } 2b$$

Enfin, d'après 3, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$ et on a $\tan(X) \sim_0 X$ donc par substitution, $\tan(y_n) \sim_{+\infty} y_n$.
Donc $y_n \sim_{+\infty} \frac{-1}{\ln(n)}$ donc $y_n = \frac{-1}{\ln(n)} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$. Comme $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + y_n$ on a :

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\ln(n)} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$$

5 On pose $z_n = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\ln(n)}$. En s'inspirant de la question précédente, montrer que :

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\ln(n)} + \frac{\ln(\pi)}{(\ln(n))^2} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{(\ln(n))^2}\right)$$

On a :

$$\tan(z_n) = \tan\left(x_n - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\ln(n)}\right) = \frac{-1}{\tan\left(x_n + \frac{1}{\ln(n)}\right)} = \frac{\tan(x_n)\tan\left(\frac{1}{\ln(n)}\right) - 1}{\tan(x_n) + \tan\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)}$$

Or $\tan(x) = x - \frac{x^3}{3} + o_o(x^3)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0$ donc par substitution :

$$\begin{aligned}
\tan\left(\frac{1}{\ln(n)}\right) &= \frac{1}{\ln(n)} - \frac{1}{3(\ln(n))^3} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{(\ln(n))^3}\right) \\
&= \frac{1}{\ln(n)} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{(\ln(n))^2}\right)
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\tan(x_n) &= \ln(x_n) = \ln\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + o_{n\to+\infty}(1)\right) \\
&= \ln(n\pi) + \ln\left(1 + \frac{1}{2n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \ln(n) + \ln(\pi) + \frac{1}{2n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) \text{ car } \ln(1+X) = X + o_0(X) \\
&= \ln(n) + \ln(\pi) + o_{n\to+\infty}(1)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\tan(x_n)\tan\left(\frac{1}{\ln(n)}\right) &= (\ln(n)+\ln(\pi)+o_{n\to+\infty}(1))\left(\frac{1}{\ln(n)}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{(\ln(n))^2}\right)\right)\\ &= 1+\frac{\ln(\pi)}{\ln(n)}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)\end{aligned}$$

donc

$$\tan(x_n)\tan\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)-1=\frac{\ln(\pi)}{\ln(n)}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)\sim_{+\infty}\frac{\ln(\pi)}{\ln(n)}$$

D'autre part :

$$\tan(x_n)+\tan\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)=\ln(n)+\ln(\pi)+o_{n\to+\infty}(1)+\frac{1}{\ln(n)}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{(\ln(n))^2}\right)\sim_{+\infty}\ln(n)$$

(ce qui justifie a posteriori que au moins pour n suffisamment grand, $\tan\left(x_n+\dfrac{1}{\ln(n)}\right)\neq 0$).
Donc :

$$\tan(z_n)\sim_{+\infty}\frac{\frac{\ln(\pi)}{\ln(n)}}{\ln(n)}\sim_{+\infty}\frac{\ln(\pi)}{(\ln(n))^2}$$

En particulier, on a (évidemment) $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n=0$ donc $z_n\sim_{+\infty}\tan(z_n)\sim_{+\infty}\dfrac{\ln(\pi)}{(\ln(n))^2}$ donc :

$$x_n=n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\ln(n)}+\frac{\ln(\pi)}{(\ln(n))^2}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{(\ln(n))^2}\right)$$

Exercice 6 : Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul vérifiant $P(X^2)=P(X)P(X-1)$.

1 Soit $z\in\mathbb{C}$ une racine de P. Montrer que z^2 est racine de P.
Soit z une racine de P. On a donc $P(z^2)=P(z)P(z-1)=0$ donc z^2 est racine de P.

2 Montrer que les racines complexes sont soit nulles, soit de module 1.
Par le même raisonnement, $(z^2)^2=z^4$ est racine de P, $(z^4)^2=z^8$ est racine de P donc, par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}$, z^{2^n} est racine de P.
Si $|z|>1$, la suite $\left(\left|z^{2^n}\right|\right)$ est strictement croissante donc si $k\neq l$, alors $z^{2^k}\neq z^{2^l}$ donc P admet une infinité de racines. De même, si $0<|z|<1$. Un polynôme non nul admet un nombre fini de racines donc $|z|=1$ ou $|z|=0$.

3 Montrer que 0 n'est pas racine de P.
De plus $P((z+1)^2)=P(z+1)P(z)=0$ donc $(z+1)^2$ est racine donc si 0 est racine de P, alors $(0+1)^2=1$ est racine et $(1+1)^2=4$ est racine ce qui contredit la question précédente.

4 Déterminer les polynômes vérifiant $P(X^2)=P(X)P(X-1)$
On en déduit que $\left|(z+1)^2\right|=1$ (donc $|z+1|=1$) et $|z|=1$ soit, si $z=x+iy$ $\left\{\begin{array}{r}x^2+y^2=1\\ x^2+2x+y^2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow$

$x=-\frac{1}{2}$ et $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z=e^{\pm i\frac{2\pi}{3}} \Leftrightarrow z\in\{j,j^2\}$. Il existe des entiers naturels α, β tels que $P=C\left(X-j\right)^{\alpha}\left(X-j^2\right)^{\beta}$.

Réciproquement, posons $P=C\left(X-j\right)^{\alpha}\left(X-j^2\right)^{\beta}$. On a $P\left(X^2\right)=C\left(X^2-j\right)^{\alpha}\left(X^2-j^2\right)^{\beta}$ et $j^3=1$ donc $j^4=j$ donc $X^2-j=X^2-\left(j^2\right)^2=\left(X-j^2\right)\left(X+j^2\right)$ et $P\left(X^2\right)=C\left(X-j^2\right)^{\alpha}\left(X+j^2\right)^{\alpha}\left(X-j\right)^{\beta}\left(X+j\right)^{\beta}$ (décomposition en irréductible). Par ailleurs, $P\left(X\right)P\left(X-1\right)$ $C^2\left(X-j\right)^{\alpha}\left(X-j^2\right)^{\beta}\left(X-1-j\right)^{\alpha}\left(X-1-j^2\right)^{\beta}$. Or $1+j+j^2=0$ donc $P\left(X\right)P\left(X-1\right)=C^2\left(X-j\right)^{\alpha}\left(X-j^2\right)^{\beta}\left(X+j^2\right)^{\alpha}\left(X+j\right)^{\beta}$. D'après l'unicité de la décomposition en irréductibles dans $\mathbb{C}[\mathbb{X}]$, $P\left(X^2\right)=P\left(X\right)P\left(X-1\right)$ si et seulement si $C^2=C$ ($C=0$ ou $C=1$) et $\alpha=\beta$. Les solutions sont donc le polynôme nul et les polynômes $\left(X-j\right)^{\alpha}\left(X-j^2\right)^{\alpha}=\left(X^2+X+1\right)^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{N}$.