D.S.5 9 Mars 2024

Exercice 1 : *On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$, on note I_n l'élément neutre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour la multiplication.*

Pour θ réel quelconque, on définit la matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

Soit F le sous ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ *avec* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

Soit G le sous ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices de la forme $\begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}$ *avec* $(c,d) \in \mathbb{R}^2$

0 Rappeler la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1 Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Préciser une base de F et la dimension de F.
Justifier rapidement que G est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.

2 Montrer que F et G sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Soit θ un réel, $\theta \neq k\pi, k$ entier relatif quelconque et C l'ensemble des matrices M appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et vérifiant $MR_\theta = R_\theta M$.

3a Montrer que F est inclus dans C.

3b Déterminer $G \cap C$.

4 Montrer que $F = C$.

Exercice 2 : Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

- on note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n.
- on pose $P_n(X) = (X^2-1)^n$
- on appelle n-ième polynôme de Legendre, noté L_n, la dérivée n-ième du polynôme P_n : $L_n(X) = P_n^{(n)}(X)$.
  Ainsi, $L_0 = P_0$, $L_1 = P_1'$, $L_2 = P_2''$, ...

1 : Exemple $n = 2$:

1a Ecrire sous forme développée les polynômes L_0, L_1 et L_2.

1b Montrer que la famille $\mathcal{B}_2 = (L_0, L_1, L_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2 : Base des polynômes de Legendre Fixons $n \in \mathbb{N}^*$.

2a Déterminer le degré de L_k pour tout $k \in \mathbb{N}$, ainsi que son coefficient dominant.

2b Justifier que $\mathcal{B}_n = (L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2c Préciser l'ordre de multiplicité des racines de P_n. Soit $k \in [|0, n-1|]$. Que valent les nombres $P_n^{(k)}(1)$ et $P_n^{(k)}(-1)$?

2d Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer :

$$\forall k \in [|0,n|], \quad \int_{-1}^{1} L_n(t)\, Q(t)\, dt = (-1)^k \int_{-1}^{1} P_n^{(n-k)}(t)\, Q^{(k)}(t)\, dt.$$

2e En déduire : $\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\int_{-1}^{1} L_n(t)\, Q(t)\, dt = 0$.

2f En déduire que pour tous entiers naturels $j \neq k$: $\int_{-1}^{1} L_j(t)\, L_k(t)\, dt = 0$.

3a Justifier que pour tout entier k, $\int_{-1}^{1} (L_k(t))^2\, dt > 0$.

3b Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Déterminer les coordonnées $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de P dans $\mathcal{B}_n$ en fonction des intégrales $\int_{-1}^{1} P(t)\, L_k(t)\, dt$ et $\int_{-1}^{1} (L_k(t))^2\, dt$ avec $k \in [|0,n|]$.

Problème 1 : On définit pour tout entier n naturel non nul le polynôme P_n par les relations:
$$\begin{cases} P_1 = 1 \\ P_{n+1} = (2nX+1)P_n - X^2 P_n' \end{cases}$$

1 Calculer P_2 et P_3.

2 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(P_n) = n-1$ et $c(P_n) = n!$ où $c(P_n)$ désigne le coefficient dominant de P_n.

3 Déterminer le coefficient constant de P_n.
Soit $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, définie sur $\mathbb{R}^*$.

4a Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

4b Calculer f', f'' et $f^{(3)}$.

4c Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n}{x^{2n}} e^{1/x} P_n(x)$.

5 On pose $g(x) = x^2 f'(x) + f(x)$. Soit $n \geq 2$.

5a Exprimer la dérivée n_ième de g en fonction de P_{n+1}, P_n et P_{n-1} (on pourra utiliser la formule de Leibniz).

5b En déduire que $P_{n+1} - (2nX+1)P_n + n(n-1)X^2 P_{n-1} = 0$ et que $n(n-1)P_{n-1} = P_n'$.

5c En déduire la relation :

$$n(n-1)P_n - (1 + (2n-2)X)P_n' + X^2 P_n'' = 0$$

6 On pose $P_n(X) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ et on considère $i \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$.

6a Démontrer que $a_{i+1} = \dfrac{(n-i)(n-i-1)}{i+1} a_i$.

6b Déterminer le coefficient a_i pour $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Problème 2 : Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 3xe^{-x^2} - 1$.

On donne $e \simeq 2.7$; $\dfrac{1}{\sqrt{e}} \simeq 0.6$; $\sqrt{2} \simeq 1.4$; $3\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-1/2} \simeq 1.2$ et $\ln(3) \simeq 1.1$

Partie 1 : étude d'une fonction.

1 Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, ainsi que les limites aux bornes du domaine de définition.

2 Donner le tableau de variations de f, précisez les asymptotes.

3 Donner l'équation de la tangente en 0. Etudier la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la tangente au point d'abcisse 0.

4 Donner l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Partie 2 : étude de deux suites. On suppose désormais dans toute la suite du problème que l'entier naturel n est supérieur ou égal à 2. Soit $f_n(x) = 3x^n e^{-x^2} - 1$.

5 Quel est le signe de $f_n(0)$? de $f_n(1)$?

6 Etudier les variations de f_n sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Justifiez ensuite que les éventuelles monotonies de f_n obtenues sont strictes.
Donner la limite de $f_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$. En déduire que f_n s'annule sur $[0, +\infty[$ en deux réels, et exactement deux, notés u_n et v_n et vérifiant $u_n < 1 < v_n$.

7 Quelle est la limite de la suite (v_n) ?

8a Calculer $e^{-u_n^2}$ en fonction de u_n^n.

8b En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$.

8c Déduire de ce qui précède la monotonie de $(u_n)_{n\geq 2}$.

8d Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note l sa limite.

9 Soit g_n définie sur $]0, +\infty[$ par : $\forall x > 0,\ g_n(x) = \ln(3) + n\ln(x) - x^2$.

9a Soit $t > 0$. Montrer que $g_n(t) = 0$ si et seulement si $f_n(t) = 0$.

9b On suppose que $l \neq 1$. Trouver une contradiction en utilisant ce qui précède. Qu'en conclut-on ?

9c Soit la suite $(w_n)_{n\geq 2}$ définie par $\forall n \geq 2,\ w_n = u_n - 1$. Trouver, en utilisant un développement limité de $g_n(1 + w_n)$, un équivalent simple de w_n.

Partie 3 : étude d'une équation différentielle. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E_n l'équation différentielle $xy' - (n - 2x^2)\,y = n - 2x^2$. Soit H_n l'équation homogène associée à E_n.

10 Résoudre H_n sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.

11 En déduire les solutions de E_n sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.

Corrigé de l'exercice 1 : Pour θ réel quelconque, on définit la matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

Soit F le sous ensemble de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

Soit G le sous ensemble de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices de la forme $\begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}$ avec $(c,d) \in \mathbb{R}^2$

0 Rappeler la dimension de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.
$\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4$.

1 Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Préciser une base de F et la dimension de F.
Justifier rapidement que G est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.

- $F \subset \mathcal{M}$.
- Pour $a = b = 0$, $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ est la matrice nulle qui appartient à F
- De plus $\lambda \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \lambda' \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a + \lambda' a' & -(\lambda b + \lambda' b') \\ \lambda b + \lambda' b' & \lambda a + \lambda' a' \end{pmatrix} \in F$ donc F est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $F = Vect(I_2, S)$ avec $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
La famille de matrices (I_2, S) est libre donc est une basede F donc $\dim(F) = 2$.
On montre de même que G est un sous espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de base (S', S'') avec $S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $S'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc G est de dimension 2.
On pouvait bien sûr procéder pour l'ensemble de cette question par "atomisation" à condition de bien le rédiger.

2 Montrer que F et G sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

- $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}$ entraîne $a = c = -c$ et $b = d = -b$ donc $\boxed{F \cap G = \left\{0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\right\}}$
- De plus $\boxed{\dim(F) + \dim(F) = 2 + 2 = 4 = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))}$
- donc F et G sont des sous espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit θ un réel, $\theta \neq k\pi, k$ entier relatif quelconque et C l'ensemble des matrices M appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et vérifiant $MR_\theta = R_\theta M$.

3a Montrer que F est inclus dans C.
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos(\theta) - b\sin(\theta) & -a\sin(\theta) - b\cos(\theta) \\ a\sin(\theta) + b\cos(\theta) & a\cos(\theta) - b\sin(\theta) \end{pmatrix}$$
$= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ donc F est contenu dans C.

3b Déterminer $G \cap C$.
$$\begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\cos(\theta) + d\sin(\theta) & -c\sin(\theta) + d\cos(\theta) \\ -c\sin(\theta) + d\cos(\theta) & -c\cos(\theta) - d\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

et $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\cos(\theta) - d\sin(\theta) & c\sin(\theta) + d\cos(\theta) \\ c\sin(\theta) + d\cos(\theta) & -c\cos(\theta) + d\sin(\theta) \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix} \in$ C si et seulement si $\begin{cases} d\sin(\theta) = -d\sin(\theta) \\ -c\sin(\theta) = c\sin(\theta) \end{cases}$. Or $\theta \neq k \times \pi$ donc $\sin(\theta) \neq 0$ donc $d = c = 0$ donc $G \cap C = \left\{0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\right\}$.

4 Montrer que $F = C$ (on pourra supposer qu'une matrice M appartient à C et utiliser les questions 2 et 3).

Soit M une matrice quelconque. On peut écrire $M = M_1 + M_2$ avec $M_1 \in F$ et $M_2 \in G$.
$M \in C \iff MR_\theta = R_\theta M \iff (M_1 + M_2) R_\theta = R_\theta (M_1 + M_2) \iff M_1R_\theta + M_2R_\theta = R_\theta M_1 + R_\theta M_2$.
Or $M_1 \in F$ donc $M_1 \in C$ donc $M \in C \iff M_2R_\theta = R_\theta M_2$ ce qui, d'après la question 3, entraine que $M_2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$ car $M_2 \in G$.
On en déduit que $M \in C \iff M = M_1$ donc $F = C$.

Corrigé de l'exercice 2 : Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

- on note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n.
- on pose $P_n(X) = (X^2 - 1)^n$
- on appelle n-ième polynôme de Legendre, noté L_n, la dérivée n-ième du polynôme P_n : $L_n(X) = P_n^{(n)}(X)$.
  Ainsi, $L_0 = P_0$, $L_1 = P_1'$, $L_2 = P_2''$, ...

et de déterminer les coordonnées d'un polynôme quelconque P de $\mathbb{R}_n[X]$ dans la base $\mathcal{B}_n$.
Sans aborder la partie 2, on pourra quand même traiter la partie 3 en utilisant uniquement le résultat de la question $2e$.

1 : exemple $n = 2$:

1a Ecrire sous forme développée les polynômes L_0, L_1 et L_2.
On a :

$$\begin{aligned} L_0 &= P_0 = \left(X^2 - 1\right)^0 = 1 \\ P_1 &= X^2 - 1 \text{ donc } L_1 = P_1' = 2X \\ P_2 &= \left(X^2 - 1\right)^2 \text{ donc } P_2' = 4X\left(X^2 - 1\right) = 4X^3 - 4X \\ \text{donc } L_2 &= P_2'' = 12X^2 - 4 \end{aligned}$$

1b Montrer que la famille $\mathcal{B}_2 = (L_0, L_1, L_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

L_0, L_1, L_2 sont de degré $0, 1, 2$ donc forment une famille de polynômes de degrés échelonnés de 0 à 2 donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2 : Base des polynômes de Legendre Fixons $n \in \mathbb{N}^*$.

2a Déterminer le degré de L_k pour tout $k \in \mathbb{N}$, ainsi que son coefficient dominant.
On a $\deg(P_k) = 2k$ donc $\deg(L_k) = 2k - k = k$.
De plus, le coefficient (dominant) de X^{2k} dans P_k est 1 donc celui (dominant) de X^k dans $L_k = P_k^{(k)}(X)$ vaut :

$$c(L_k) = 2k(2k-1)\cdots(k+1) = \frac{(2k)!}{k!}$$

2b Justifier que $\mathcal{B}_n = (L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

$(L_0, \ldots L_n)$ est donc une famille de polynomes de degré échelonnés de 0 à n donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2c Préciser l'ordre de multiplicité des racines de P_n. Soit $k \in [|0, n-1|]$. Que valent les nombres $P_n^{(k)}(1)$ et $P_n^{(k)}(-1)$?

On a $P_n(X) = (X^2-1)^n = (X-1)^n (X+1)^n$ donc les racines de P_n sont 1 et -1 avec multiplicité n pour chacune.

D'après la caractérisation de la multiplicité des racines, on a donc pour tout $k \in [|0, n-1|]$, $P_n^{(k)}(1) = P_n^{(k)}(-1) = 0$.

2d Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer :

$$\forall k \in [|0, n|], \quad \int_{-1}^{1} L_n(t)\, Q(t)\, dt = (-1)^k \int_{-1}^{1} P_n^{(n-k)}(t)\, Q^{(k)}(t)\, dt.$$

Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$.

Montrons la formule de l'énoncé par récurrence bornée sur $k \in [|0, n|]$:

- Initialisation : $k = 0$. On a $\not{L}_n = P_n^{(n)} = P_n^{(n-k)}$ et $Q = Q^{(0)} = Q^{(k)}$ donc évidemment, $\int_{-1}^{1} L_n(t)\, Q(t)\, dt = (-1)^k \int_{-1}^{1} P_n^{(n-k)}(t)\, Q^{(k)}(t)\, dt$.
- Hérédité : Soit $k \in [|0, n-1|]$, supposons $\int_{-1}^{1} L_n(t)\, Q(t)\, dt = (-1)^k \int_{-1}^{1} P_n^{(n-k)}(t)\, Q^{(k)}(t)\, dt$.

  On intègre par parties en posant $\begin{cases} u(t) = Q^{(k)}(t) \\ v(t) = P_n^{(n-(k+1))}(t) \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u'(t) = Q^{(k+1)}(t) \\ v'(t) = P_n^{(n-k)}(t) \end{cases}$ d'où :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} L_n(t)\, Q(t)\, dt &= (-1)^k \left(\left[Q^{(k)}(t)\, P_n^{(n-k)}(t) \right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P_n^{(n-(k+1))}(t)\, Q^{(k+1)}(t)\, dt. \right) \\ &= (-1)^k \left(0 - 0 - \int_{-1}^{1} P_n^{(n-(k+1))}(t)\, Q^{(k+1)}(t)\, dt \right) \quad \text{d'après } 2b \\ &= (-1)^{k+1} \int_{-1}^{1} P_n^{(n-(k+1))}(t)\, Q^{(k+1)}(t)\, dt \end{aligned}$$

  ce qui achève la récurrence et donne la formule pour tout $k \in [|0, n|]$.

2e En déduire : $\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\int_{-1}^{1} L_n(t)\, Q(t)\, dt = 0$.

Pour $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $Q^{(n)} = 0$ donc en prenant $k = n$ ci-dessus, on a : $\int_{-1}^{1} L_n(t)\, Q(t)\, dt = (-1)^n \int_{-1}^{1} P_n^{(n-n)}(t)\, Q^{(n)}(t)\, dt = (-1)^n \int_{-1}^{1} 0 dt = 0$.

2f En déduire que pour tous entiers naturels $j \neq k$: $\int_{-1}^{1} L_j(t)\, L_k(t)\, dt = 0$.

Or si $j \neq k$, on a $j > k$ ou $j < k$.

Par exemple, si $j > k$, on a $L_k \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$ car $\deg(L_k) = k < j$ donc d'après $2d$ en prenant $Q = L_k$, on a $\int_{-1}^{1} L_j(t)\, L_k(t)\, dt = 0$.

Idem en échangeant j et k si $j < k$.

3a Justifier que pour tout entier k, $\int_{-1}^{1} (L_k(t))^2\, dt > 0$.

- $\forall t \in [-1, 1]$, $(L_k(t))^2 \geq 0$

- $t \mapsto (L_k(t))^2$ est continue sur $[-1,1]$
- $t \mapsto (L_k(t))^2$ n'est pas identiquement nulle sur $[-1,1]$ (car sinon, L_k admettrait une infinité de racines donc serait le polynome nul, ce qui n'est pas).
  Dconc $\int_{-1}^{1} (L_k(t))^2 \, dt > 0$.

3b Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Déterminer les coordonnées $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de P dans $\mathcal{B}_n$ en fonction des intégrales $\int_{-1}^{1} P(t) L_k(t) \, dt$ et $\int_{-1}^{1} (L_k(t))^2 \, dt$ avec $k \in [|0,n|]$.
P se décompose ainsi : $P = a_0 L_0 + a_1 L_1 + \cdots + a_n L_n$ avec $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. On a alors pour$k \in [|0,n|]$:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} P(t) L_k(t) \, dt &= \int_{-1}^{1} (a_0 L_0 + a_1 L_1 + \cdots + a_n L_n)(t) L_k(t) \, dt \\
&= \int_{-1}^{1} \sum_{i=0}^{n} a_i L_i(t) L_k(t) \, dt = \sum_{i=0}^{k} a_i \int_{-1}^{1} L_i(t) L_k(t) \, dt \\
&= a_k \int_{-1}^{1} (L_k(t))^2 \, dt \text{ car tous les autres sont nuls vu } 2f.
\end{aligned}$$

donc puisque $\int_{-1}^{1} (L_k(t))^2 \, dt \neq 0$, il vient $a_k = \dfrac{\int_{-1}^{1} P(t) L_k(t) \, dt}{\int_{-1}^{1} (L_k(t))^2 \, dt}$.

Corrigé du problème 1 : On définit pour tout entier n naturel non nul le polynôme P_n par les relations: $\begin{cases} P_1 = 1 \\ P_{n+1} = (2nX+1)P_n - X^2 P_n' \end{cases}$

1 Calculer P_2 et P_3.
On a :

$$\begin{aligned}
P_2 &= (2X+1) P_1 - X^2 P_1' = 2X + 1 \\
P_3 &= (4X+1) P_2 - X^2 P_2' = (4X+1)(2X+1) - 2X^2 = 6X^2 + 6X + 1
\end{aligned}$$

2 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(P_n) = n-1$ et $c(P_n) = n!$ où $c(P_n)$ désigne le coefficient dominant de P_n.
Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\deg(P_n) = n-1$ et $c(P_n) = n!$

- Initiaisation. : $n = 0$, $P_1 = 1$ donc $\deg(P_1) = 0$ et $c(P_1) = 1 = 1!$
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\deg(P_n) = n-1$ et $c(P_n) = n!$.
  On peut donc écrire $P_n = n! X^{n-1} + Q_n$ avec $\deg(Q_n) \leq n-2$. On a alors :

$$\begin{aligned}
P_n' &= (n-1) n! X^{n-2} + Q_n' \\
P_{n+1} &= (2nX+1)\left(n! X^{n-1} + Q_n\right) - X^2 \left((n-1) n! X^{n-2} + Q_n'\right) \\
&= n! (2n - n + 1) X^n + 2nXQ_n + n! X^{n-1} + Q_n - X^2 Q_n' \\
&= (n+1)! X^n + Q_{n+1}
\end{aligned}$$

avec $Q_{n+1} = 2nXQ_n + n!X^{n-1} + Q_n - X^2 Q_n'$. Or $\deg(Q_n') \leq n-3$ donc $\deg(X^2 Q_n') \leq n-1$ et $\deg(Q_n) \leq n-1$ donc

$$\deg\left(n! X^{n-1} + Q_n - X^2 Q_n'\right) \leq \max\left(\deg\left(n! X^{n-1}, Q_n, X^2 Q_n'\right)\right) \leq n-1$$

donc on conclut $\deg(P_{n+1}) = n+1$ et $c(P_{n+1}) = (n+1)!$ ce qui achève la récurrence.

3 Déterminer le coefficient constant de P_n.

Vu la définition $P_{n+1} = (2nX+1)P_n - X^2P'_n$, il est clair que le coefficient de P_{n+1} est aussi celui de P_n donc in fine, celui de P_1, c'est-à dire 1.

Soit $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, définie sur $\mathbb{R}^*$.

4a Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

4b Calculer f', f'' et $f^{(3)}$.

On pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} = -x^{-2}e^{\frac{1}{x}} \\
f''(x) &= \left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)e^{\frac{1}{x}} = \frac{2x+1}{x^4}e^{\frac{1}{x}} \\
f^{(3)}(x) &= \left(\frac{2x^4 - 4x^3(2x+1)}{x^8} - \frac{1}{x^2}\frac{2x+1}{x^4}\right)e^{\frac{1}{x}} \\
&= \frac{-6x^2 - 6x - 1}{x^6}e^{\frac{1}{x}}
\end{aligned}$$

4c Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n}{x^{2n}}e^{1/x}P_n(x)$.

Montrons ceci par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

- Init. : $n = 1$: $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} = \dfrac{(-1)^n}{x^{2n}}e^{\frac{1}{x}}$ (ok aussi pour $n = 2$ et $n = 3$ vu ci-dessus)
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n}{x^{2n}}e^{1/x}P_n(x)$. Alors :

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= (-1)^n\left(\frac{x^{2n}P'_n(x) - 2nx^{2n-1}P_n(x)}{x^{4n}} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{x^{2n}}P_n(x)\right)e^{1/x} \\
&= (-1)^n\left(\frac{x^2P'_n(x) - 2nxP_n(x) - P_n(x)}{x^{2n+2}}\right)e^{1/x} \\
&= (-1)^{n+1}\frac{P_{n+1}(x)}{x^{2n+2}}e^{1/x}
\end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

5 On pose $g(x) = x^2f'(x) + f(x)$. Soit $n \geq 2$.

5a Exprimer la dérivée n_ième de g en fonction de P_{n+1}, P_n et P_{n-1} (on pourra utiliser la formule de Leibniz).

On dérive n fois $g(x)$ en utilisant la formule de Leibiniz (tout étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$), pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned}
g^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(x \mapsto x^2\right)^{(k)} (f')^{(n-k)}(x) + f^{(n)}(x) \\
&= x^2 f^{(n+1)}(x) + 2nx f^{(n)}(x) + n(n-1) f^{(n-1)}(x) + f^{(n)}(x) \\
&= \frac{(-1)^{n+1} P_{n+1}(x) + (-1)^n 2nx P_n(x) + (-1)^n P_n(x) + n(n-1)(-1)^{n-1} x^2 P_{n-1}(x)}{x^{2n}} e^{1/x} \\
& (-1)^{n+1} \frac{P_{n+1}(x) - (2nx+1) P_n(x) + n(n-1) x^2 P_{n-1}(x)}{x^{2n}} e^{1/x}
\end{aligned}$$

5b En déduire que $P_{n+1} - (2nX+1) P_n + n(n-1) X^2 P_{n-1} = 0$ et que $n(n-1) P_{n-1} = P_n'$.
Or $g(x) = x^2 f'(x) + f(x) = 0$ donc aussi $g^{(n)}(x) = 0$ donc $P_{n+1}(x) - (2nx+1) P_n(x) + n(n-1) x^2 P_{n-1}(x) = 0$ et ceci vaut pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ donc aussi en 0 (par exemple car toutes les fonctions sont continues en 0) donc en tant que polynômes :

$$P_{n+1} - (2nX+1) P_n + n(n-1) X^2 P_{n-1} = 0$$

D'autre part, $P_{n+1} = (2nX+1)P_n - X^2 P_n'$ donc en soustrayant à ce qui précède :
$n(n-1) X^2 P_{n-1} = X^2 P_n'$ donc $n(n-1) P_{n-1} = P_n'$.

5c En déduire la relation :

$$n(n-1) P_n - (1 + (2n-2) X) P_n' + X^2 P_n'' = 0$$

En changeant n en $n+1$ on a :

$$n(n+1) P_n = P_{n+1}'.$$

Or $P_{n+1} = (2nX+1)P_n - X^2 P_n'$ donc aussi :

$$\begin{aligned}
P_{n+1}' &= (2nX+1)P_n' + 2nP_n - X^2 P_n'' - 2XP_n' \\
&= 2nP_n + 2(n-1) XP_n' + P_n' - X^2 P_n''
\end{aligned}$$

En comparant ces deux expressions de P_{n+1}' :

$$2nP_n + (2(n-1)X + 1) P_n' - X^2 P_n'' = n(n+1) P_n$$

soit :

$$n(n-1) P_n - (1 + (2n-2) X) P_n' + X^2 P_n'' = 0$$

6 On pose $P_n(X) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ et on considère $i \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$.

6a Démontrer que $a_{i+1} = \dfrac{(n-i)(n-i-1)}{i+1} a_i$.

Réécrivons la relation $n(n-1)P_n = (1+(2n-2)X)P_n' - X^2P_n''$:

$$\begin{aligned}
n(n-1)\sum_{i=0}^{n-1} a_iX^i &= (1+(2n-2)X)\sum_{i=1}^{n-1} ia_iX^{i-1} - X^2\sum_{i=2}^{n-1} i(i-1)a_iX^{i-2} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} ia_iX^{i-1} + (2n-2)\sum_{i=1}^{n-1} ia_iX^i - \sum_{i=2}^{n-1} i(i-1)a_iX^i \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} ((i+1)a_{i+1} + (2n-2)ia_i - i(i-1)a_i)X^i \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} ((i+1)a_{i+1} + (2n-1-i)ia_i)X^i
\end{aligned}$$

Pour $i \in \{0,1,\ldots,n-2\}$, considérons le coefficient de X^{i+1} dans cette relation, il vient :

$$n(n-1)a_i = (i+1)a_{i+1} + (2n-1-i)ia_i$$

donc :

$$\begin{aligned}
a_{i+1} &= \frac{n(n-1)-(2n-1-i)i}{i+1}a_i \\
&= \frac{n^2-n-2ni+i+i^2}{i+1}a_i \\
&= \frac{(n-i)(n-i-1)}{i+1}a_i
\end{aligned}$$

6b Déterminer le coefficient a_i pour $i \in \{0,1,\ldots,n-1\}$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
a_i &= \frac{(n-i+1)(n-i)}{i}a_{i-1} \\
&= \frac{(n-i+2)(n-i+1)^2(n-i)}{i(i-1)}a_{i-2} \\
&= \frac{(n-i+3)(n-i+2)^2(n-i+1)^2(n-i)}{i(i-1)(i-2)}a_{i-3} \\
&\vdots \\
&= \frac{n(n-1)^2\cdots(n-i+1)^2(n-i)}{i!}a_0 \\
&= \frac{n!(n-1)!}{i!(n-i-1)!(n-i)!}
\end{aligned}$$

Corrigé du problème 2 : Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 3xe^{-x^2} - 1$.

On donne $e \simeq 2.7$; $\dfrac{1}{\sqrt{e}} \simeq 0.6$; $\sqrt{2} \simeq 1.4$; $3\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-1/2} \simeq 1.2$ et $\ln(3) \simeq 1.1$.

Partie 1 : étude d'une fonction.

1 Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, ainsi que les limites aux bornes du domaine de définition.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme produit et composée de fonctions dérivables et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 3e^{-x^2} - 6x^2 e^{-x^2} = 3\left(1-2x^2\right)e^{-x^2}$$

donc $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 \leq 1 \Leftrightarrow x^2 \leq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

donc f est décroissante sur $\left]-\infty, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et sur $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$ et croissante sur $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

De plus, $\left|xe^{-x^2}\right| = \left(x^2\right)^{1/2} e^{-x^2}$.

Par croissance comparée, $\lim\limits_{X\to+\infty} X^{1/2}e^{-X} = 0$, or $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty$ donc par composition de limites, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left|xe^{-x^2}\right| = 0$ donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} xe^{-x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -1$.

2 Donner le tableau de variations de f, précisez les asymptotes.

$f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -3\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-1/2} - 1 \simeq -2.2$ et $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-1/2} - 1 \simeq 0.2$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$\simeq -2.2$	$\nearrow$	$\simeq 0.2$	$\searrow$	-1

La droite horizontale $\Delta : y = -1$ est donc asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

3 Donner l'équation de la tangente en 0. Etudier la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la tangente au point d'abcisse 0.

$f(0) = -1$ et $f'(0) = 3$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ admet au point d'abcisse 0 une tangente T_0 d'équation $T_0 : y = 3x - 1$.

De plus :

$$\begin{aligned} f(x) - (3x-1) &= 3xe^{-x^2} - 1 - (3x-1) \\ &= 3x\left(e^{-x^2} - 1\right) \end{aligned}$$

Or $-x^2 \leq 0$ donc $e^{-x^2} - 1 < 0$ donc $f(x) - (3x-1)$ est du signe de $-x$ donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T_0 pour $x < 0$ et au-dessous pour $x > 0$. Donc le point d'abcisse 0 de $\mathcal{C}_f$ est un point d'inflexion.

Remarquons qu'ici il n'était pas nécessaire de faire un développement limité. Cependant, un tel développement limité est possible et donne $f(x) = -1 + 3x - 3x^3 + o_0\left(x^3\right)$ et donne la même conclusion mais seulement au voisinage de 0.

4 Donner l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Partie 2 : étude de deux suites. On suppose désormais dans toute la suite du problème que l'entier naturel n est supérieur ou égal à 2. Soit $f_n(x) = 3x^n e^{-x^2} - 1$.

5 Quel est le signe de $f_n(0)$? de $f_n(1)$?

$f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = \dfrac{3}{e} - 1 > 0$ car $3 > e > 0$

6 Etudier les variations de f_n sur l'intervalle $[0,+\infty[$. Justifiez ensuite que les éventuelles monotonies de f_n obtenues sont strictes.

ATTENTION : dans cette question, les détails sont délicats à rédiger (monotonie stricte, inégalités strictes, unicité, hypothèses des théorèmes appliqués, choix des théorèmes les plus simples à utiliser,...)

f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f_n'(x) = 3e^{-x^2}\left(nx^{n-1} - 2x^{n+1}\right) = 3x^{n-1}e^{-x^2}\left(n - 2x^2\right)$ donc :

$$f_n'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{n}{2} \Leftrightarrow x \leq \sqrt{n/2}$$

donc f_n est croissante sur $\left[0, \sqrt{n/2}\right]$ et décroissante sur $\left[\sqrt{n/2}, +\infty\right[$.

Comme f_n' ne s'annule qu'en 0 et en $\sqrt{n/2}$, ces monotonies sont en fait strictes.

Donner la limite de $f_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$. En déduire que f_n s'annule sur $[0,+\infty[$ en deux réels, et exactement deux, notés u_n et v_n et vérifiant $u_n < 1 < v_n$.

On a pour $x \geq 0$: $3x^n e^{-x^2} = 3\frac{\left(x^2\right)^{n/2}}{e^{x^2}} \to 0$ quand $x \to +\infty$ par croissance comparée et composition de limites. Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = -1.$$

Donc d'après le théorème de la bijection, f_n étant strictement croissante et continue sur $\left[0, \sqrt{n/2}\right]$ et strictement décroissante et continue sur $\left[\sqrt{n/2}, +\infty\right[$, les restrictions de f_n à $\left[0, \sqrt{n/2}\right]$ et à $\left[\sqrt{n/2}, +\infty\right[$ induisent des bijections à valeurs respectivement dans $\left[-1, f_n\left(\sqrt{n/2}\right)\right]$ et dans $\left]-1, f_n\left(\sqrt{n/2}\right)\right]$.

Enfin, les variations de f_n montrent un maximum atteint en $\sqrt{n/2}$ donc $f_n\left(\sqrt{n/2}\right) \geq f_n(1) > 0$. Donc ces intervalles ($\left[-1, f_n\left(\sqrt{n/2}\right)\right]$ et $\left]-1, f_n\left(\sqrt{n/2}\right)\right]$) contiennent 0.

Donc par bijectivité, f_n s'annule un un unique réel $u_n \in \left[0, \sqrt{n/2}\right]$ et en un unique réel $v_n \in \left[\sqrt{n/2}, +\infty\right[$.

Puisque $n \geq 2$, $\sqrt{n/2} \geq 1$ donc $1 < v_n$ ($v_n \neq 1$ car $f_n(1) \neq 0$) et puisque $1 \in \left[0, \sqrt{n/2}\right]$ et par croissance de f_n sur cet intervalle, $u_n < 1$. Ainsi $u_n < 1 < v_n$.

7 Quelle est la limite de la suite (v_n) ?

Remarquons que $v_n \geq \sqrt{n/2}$ et que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n/2} = +\infty$ donc par théorème de comparaison, $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

8a Calculer $e^{-u_n^2}$ en fonction de u_n^n.

On a $f_n(u_n) = 0$ donc $3u_n^n e^{-u_n^2} = 1$ donc $e^{-u_n^2} = \frac{1}{3u_n^n}$.

8b En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$.

Donc $f_{n+1}(u_n) = 3u_n^{n+1}e^{-u_n^2} - 1 = \frac{3u_n^{n+1}}{3u_n^n} - 1 = u_n - 1 < 0.$

8c Déduire de ce qui précède la monotonie de $(u_n)_{n\geq 2}$.

Donc $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$ et $u_n, u_{n+1} \in [0,1] \subset \left[0, \sqrt{(n+1)/2}\right]$, intervalle sur-lequel f_{n+1} est croissante. Donc $u_n \leq u_{n+1}$.

8d Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note l sa limite.

(u_n) est donc croissante et majorée (par 1) donc convergente vers l, d'après le théorème de la limite monotone.

9 Soit g_n définie sur $]0,+\infty[$ par : $\forall x>0,\ g_n(x)=\ln(3)+n\ln(x)-x^2$.

9a Soit $t>0$. Montrer que $g_n(t)=0$ si et seulement si $f_n(t)=0$.

On a pour $t>0$:

$$\begin{aligned} g_n(t) &= 0 \Leftrightarrow \ln(3)+n\ln(t)-t^2=0 \Leftrightarrow \ln(3t^n)=t^2 \\ &\Leftrightarrow 3t^n=e^{t^2} \Leftrightarrow 3t^ne^{-t^2}=1 \Leftrightarrow f_n(t)=0. \end{aligned}$$

9b On suppose que $l\neq 1$. Trouver une contradiction en utilisant ce qui précède. Qu'en conclut-on ?

Supposons $l\neq 1$. On a $f_n(u_n)=0$ donc $g_n(u_n)=0$ donc $\ln(3)+n\ln(u_n)-u_n^2=0$ donc :

$$n=\frac{u_n^2-\ln(3)}{\ln(u_n)}$$

Mais $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(u_n)=\ln(l)\neq 0$ car $l\neq 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n^2-\ln(3)}{\ln(u_n)}=\dfrac{l^2-\ln(3)}{\ln(l)}\in\mathbb{R}$ alors que $\lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty$. Ceci est absurde donc $l=1$.

9c Soit la suite $(w_n)_{n\geq 2}$ définie par $\forall n\geq 2,\ w_n=u_n-1$. Trouver, en utilisant un développement limité de $g_n(1+w_n)$, un équivalent simple de w_n.

On a :

$$\begin{aligned} g_n(1+w_n) &= \ln(3)+n\ln(1+w_n)-(1+w_n)^2 \\ &= \ln(3)+n\ln(1+w_n)-1-2w_n-w_n^2 \end{aligned}$$

or $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=0$ donc on peut substituer w_n à t dans le développement limité en 0 de $\ln(1+t)=t-\dfrac{t^2}{2}+o_o(t^2)$:

$$g_n(1+w_n)=\ln(3)+n\left(w_n-\frac{1}{2}w_n^2+o_{+\infty}\left(w_n^2\right)\right)-1-2w_n-w_n^2$$

Or $g_n(1+w_n)=g_n(u_n)=0$ donc :

$$\begin{aligned} \ln(3)+n\left(w_n-\frac{1}{2}w_n^2+o_{+\infty}\left(w_n^2\right)\right)-1-2w_n-w_n^2 &= 0 \\ \ln(3)-1+(n-2)w_n-\left(\frac{n}{2}-1\right)w_n^2+no_{+\infty}\left(w_n^2\right) &= 0 \\ w_n\left(n-2-\left(\frac{n}{2}-1\right)w_n+no_{+\infty}(w_n)\right) &= 1-\ln(3) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{1-\ln(3)}{n}\frac{n}{n-2-\left(\frac{n}{2}-1\right)w_n+no_{+\infty}(w_n)} \\ &= \frac{1-\ln(3)}{n}\frac{1}{1-2/n-\left(\frac{1}{2}-1/n\right)w_n+o_{+\infty}(w_n)} \end{aligned}$$

et comme $\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1-2/n-\left(\dfrac{1}{2}-1/n\right)w_n + o_{+\infty}(w_n)} = 1$ donc $w_n \sim_{+\infty} \dfrac{1-\ln(3)}{n}$.

Partie 3 : étude d'une équation différentielle. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E_n l'équation différentielle $xy' - (n-2x^2)\,y = n - 2x^2$. Soit H_n l'équation homogène associée à E_n.

10 Résoudre H_n sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$.

Sur chacun des ces deux intervalles, (H_n) s'écrit $y' - \dfrac{(n-2x^2)}{x}y = 0$, c'est une équation différentielle linéaire du premier ordre. On pose $a(x) = -\dfrac{(n-2x^2)}{x}$ puis $A(x) = \int^x -\dfrac{(n-2t^2)}{t}dt = -n\ln(|x|) + x^2$, la solution générale de (H_n) sur $]0,+\infty[$ est donc $y(x) = \lambda e^{n\ln(|x|)-x^2} = \lambda x^n e^{-x^2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

et la solution générale de (H_n) sur $]-\infty,0[$ est $y(x) = \mu e^{n\ln(|x|)-x^2} = \mu x^n e^{-x^2}$, $\mu \in \mathbb{R}$ (quitte à changer μ en $-\mu$).

11 En déduire les solutions de E_n sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$.

(E_n) se réécrit $y' - \dfrac{(n-2x^2)}{x}y = \dfrac{(n-2x^2)}{x}$;

$y(x) = -1$ est solution évidente de E_n.

Si on ne s'en aperçoit pas, la méthode de variation de la constante s'applique : $y(x) = \lambda(x)\,x^n e^{-x^2}$, on a $y'(x) = \lambda'(x)\,x^n e^{-x^2} + n\lambda(x)\,x^{n-1}e^{-x^2} - 2x^{n+1}\lambda(x)\,e^{-x^2}$ donc :

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } E_n \quad &\Leftrightarrow \quad y' - \frac{(n-2x^2)}{x}y = \frac{(n-2x^2)}{x} \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda'(x)\,x^n e^{-x^2} + n\lambda(x)\,x^{n-1}e^{-x^2} - 2x^{n+1}\lambda(x)\,e^{-x^2} - \frac{(n-2x^2)}{x}\lambda(x)\,x^n e^{-x^2} \\
&= \quad \frac{(n-2x^2)}{x} \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda'(x)\,x^n e^{-x^2} = \frac{(n-2x^2)}{x} \Leftrightarrow \lambda'(x) = \left(n-2x^2\right)x^{-n-1}e^{x^2} \\
\text{On prend } \lambda(x) \quad &= \quad \int^x \left(n-2t^2\right)t^{-n-1}e^{t^2}dt = -x^{-n}e^{x^2} \text{ d'où } y(x) = 1
\end{aligned}$$

Ainsi la solution générale de E_n sur $]0,+\infty[$ est $y(x) = \lambda x^n e^{-x^2} - 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Même calcul sur $]-\infty,0[$.