D.S.6 6 Avril 2024

Problème 1 : Dans ce problème, n est un élément de $\mathbb{N}^*$, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie n, son vecteur nul est noté $\vec{0}$ et $\mathcal{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E.

Un endomorphisme φ de E est dit **échangeur** lorsqu'il existe des sous-espaces vectoriels F et G de E tels que $E = F \oplus G$ et

$$\varphi(F) \subset G \text{ et } \varphi(G) \subset F,$$

c'est-à dire :

$$\forall \vec{u} \in F, \varphi(\vec{u}) \in G \text{ et } \forall \vec{u} \in G, \varphi(\vec{u}) \in F.$$

L'objectif du problème est d'étudier, pour un endomoprhisme φ de E, les liens logiques entre les propriétés suivantes :

(**C1**) **:** l'endomorphisme φ est échangeur ;

(**C2**) **:** il existe des endomorphismes φ_1 et φ_2 de E tels que $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, $\varphi_1^2 = 0$ et $\varphi_2^2 = 0$ (où $\varphi_j^2 = \varphi_j \circ \varphi_j$ pour $j = 1, 2$).

Partie A : Quelques exemples.

1 On considère l'application :

$$\varphi : \begin{array}{c} \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (0, 3x + z, 2x - y) \end{array}$$

et on pose $\vec{e}_1 = (1, 0, -1)$, $\vec{e}_2 = (1, -1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 1, 1)$, $F = Vect(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et $G = Vect(\vec{e}_3)$.

1a Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ et donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$.

1b Montrer que $F \oplus G = \mathbb{C}^3$.

1c Montrer que $\varphi(F) \subset G$ et $\varphi(G) \subset F$. Que peut-on en déduire ?

2 On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

et $F = Vect(M_1, M_2)$ et $G = Vect(M_3, M_4)$.

On rappelle qu'en notant $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, la famille $\mathcal{C} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ appelée base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Soit φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ tel que $Mat_{\mathcal{C}}(\varphi) = A$.

2a Montrer que φ est l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) & \rightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2a+2c+2d & 0 \\ b-c-d & b-c-d \end{pmatrix} \end{array}.$$

2b Montrer que $F \oplus G = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2c Montrer que φ est échangeur.

Partie B : la notion de trace. Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[|1,n|]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit la trace de A notée $tr(A)$ comme la somme des éléments diagonaux de A :

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

3 Montrer que l'application tr : $\begin{array}{c} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C} \\ A \mapsto tr(A) \end{array}$ est linéaire.

4 Montrer : $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2,\ tr(AB) = tr(BA)$.

5 En déduire : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \forall P \in GL_n(\mathbb{C}),\ tr(PAP^{-1}) = tr(A)$.

6 En déduire que pour toutes bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de E, et tout endomorphisme φ de E, on a $tr(Mat_{\mathcal{B}_1}(\varphi)) = tr(Mat_{\mathcal{B}_2}(\varphi))$.

Ainsi, pour tout $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, le nombre $tr(Mat_{\mathcal{B}}(\varphi))$ ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$ de E ce qui autorise à appeler trace de φ ce nombre et à poser pour toute base $\mathcal{B}$ de E :

$$tr(\varphi) = tr(Mat_{\mathcal{B}}(\varphi)).$$

Partie C : l'exemple des symétries. On rappelle que E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Dans cette partie, E_1 et E_2 sont des sous-espaces supplémentaires dans E non réduits à $\vec{0}$ et s est la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2.

On pose $p = \dim(E_1)$, ce qui entraîne $\dim(E_2) = n - p$.

Soient $\mathcal{B}_1 = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p)$ une base de E_1 et $\mathcal{B}_2 = (\vec{e}_{p+1}, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E_1.

La famille $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est alos une base de E adaptée à la décomposition $E = E_1 \oplus E_2$.

7a Déterminer la matrice de s dans la base $\mathcal{B}$.

7b En déduire en fonction de n et p, la valeur de la trace de s.

8 On suppose dans cette question que l'on a $tr(s) = 0$.

8a Montrer que $n = 2p$.

On pose $F = Vect\left((\vec{e}_i + \vec{e}_{i+p})_{i\in[|1,p|]}\right)$ et $G = Vect\left((\vec{e}_i - \vec{e}_{i+p})_{i\in[|1,p|]}\right)$

8b Montrer que $F \oplus G = E$

8c Montrer que $s(F) \subset G$ et $s(G) \subset F$.

On pose pour tout $i \in [|1,n|]$: $\vec{f_i} = \begin{cases} \vec{e_i} + \vec{e}_{i+p} \text{ si } i \leq p \\ \vec{e}_{i-p} - \vec{e_i} \text{ si } i > p \end{cases}$.

8d Montrer que $\left(\vec{f_i}\right)_{i \in [|1,n|]}$ est une base de E.

Soit φ_1 l'unique endomorphisme de E tel que $\forall i \in [|1,n|]$, $\varphi_1\left(\vec{f_i}\right) = \begin{cases} \vec{0} \text{ si } i \leq p \\ \vec{f}_{i-p} \text{ si } i > p \end{cases}$.

Soit φ_2 l'unique endomorphisme de E tel que $\forall i \in [|1,n|]$, $\varphi_2\left(\vec{f_i}\right) = \begin{cases} \vec{f}_{i+p} \text{ si } i \leq p \\ \vec{0} \text{ si } i > p \end{cases}$.

8e Montrer que $\varphi_1 + \varphi_2 = s$.

8f Montrer que $\varphi_1^2 = 0$ et $\varphi_2^2 = 0$.

8g Qu'a-t-on prouvé dans cette question 8 ?

9 On suppose dans cette question que s est un échangeur. Il existe donc des sous-espaces vectoriels F et G de E tels que $F \oplus G = E$, $s(F) \subset G$ et $s(G) \subset F$.

9a Montrer que $\dim(s(F)) = \dim(F)$ et $\dim(s(G)) = \dim(G)$.

9b En déduire $\dim(F) = \dim(G)$, puis $tr(s) = 0$.

Partie D :La propriété (C1) implique (C2). Soient p et q deux entiers naturels non nuls. On admettra le résultat suivant. Sa preuve repose uniquement sur la définition du produit matriciel.

Proposition : *Soient* $A, A' \in M_p(\mathbb{C})$, $B, B' \in M_{p,q}(\mathbb{C})$, $C, C' \in M_{q,p}(\mathbb{C})$, $D, D' \in M_q(\mathbb{C})$. *On pose :*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{C}) \text{ et } M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{C}).$$

Alors le produit matriciel MM' est égal à :

$$MM' = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{C}).$$

Pour tous $r, s \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $0_{r,s}$ la matrice nulle de taille (r,s) et on pose $0_r = 0_{r,s}$. Soient $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$. On considère dans $\mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{C})$ la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0_p & B \\ A & 0_q \end{pmatrix}.$$

10 Calculer le carré de la matrice $\begin{pmatrix} 0_p & B \\ 0_{q,p} & 0_q \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{C})$. Montrer ensuite que M est la somme de deux matrices de carré nul.

Jusqu'à la fin de cette partie, on se donne un endomorphisme φ du $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que φ est un échangeur et on se donne donc une décomposition $E = F \oplus G$, où F et G sont des sous-espaces vectoriels de E tels que $\varphi(F) \subset G$ et $\varphi(G) \subset F$.

11 On suppose ici F et G tous deux non réduits à $\left\{\vec{0}\right\}$.

On se donne une base $\mathcal{B}_F = \left(\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_p\right)$ de F et une base $\mathcal{B}_G = (\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_q)$ de G où $q = n-p$.

La famille $\mathcal{B} = \left(\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_p, \vec{g}_1, \ldots \vec{g}_q\right)$ est donc une base de E adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$.

Compte-tenu des hypothèses, décrire la forme de la matrice de φ dans $\mathcal{B}$ (on donnera une justification succinte).

12 Déduire des question précédentes que φ vérifie la propriété $(\mathbf{C2})$. On n'oubliera pas de considérer le cas où l'un des sous-espaces vectoriels F ou G est réduit à $\left\{\vec{0}\right\}$.

Partie E : la propriété $(\mathbf{C2})$ implique $(\mathbf{C}1)$ pour un automorphisme. Dans cette partie, φ désigne un automorphisme bijectif du $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe deux endomorphismes φ_1 et φ_2 de E tels que :

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \text{ et } \varphi_1^2 = \varphi_2^2 = 0.$$

13 Soit ψ un endomorphisme de E tel que $\psi^2 = 0$. Comparer $\ker(\psi)$ et $\mathrm{Im}(\psi)$ et en déduire :

$$\dim(\ker(\psi)) \geq \frac{1}{2}\dim(E).$$

14 Démontrer que $E = \ker(\varphi_1) \oplus \ker(\varphi_2)$ et $\ker(\varphi_1) = \mathrm{Im}(\varphi_1)$ et $\ker(\varphi_2) = \mathrm{Im}(\varphi_2)$.

15 En déduire que φ est un échangeur.

Exercice : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.(pas forcément de dimension finie).

0 désigne l'application nulle de E.

Pour tout réel k, on définit l'ensemble $A_k = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u^2 = ku\}$, où $u^2 = u \circ u$.

Soit f un endomorphisme de E. On suppose que f est de rang 1, ce qui signifie que son image $\mathrm{Im}(f) = Vect(\vec{a})$ pour un vecteur non nul $\vec{a}$.

1 Montrer qu'il existe un réel k tel que $f \in A_k$ (on porra calculer $f(\vec{a})$ puis pour $\vec{x}$ quelconque $f^2(\vec{x})$).

2 Soit $u \in A_k$ avec $k \neq 0$.

2a Montrer qu'il existe un réel non nul λ tel que $g = \lambda u$ soit un projecteur de E.

2b Montrer que $\ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u) = E$

3 Soient $u, v \in A_k$ avec $k \neq 0$.

3a Montrer que si $u \circ v + v \circ u = 0$ alors $u \circ v = v \circ u = 0$.

3b A quelle condition nécessaire et suffisante $u + v$ est-il aussi dans A_k? Montrer que dans ce cas :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(u+v) &= \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v) \\ \ker(u+v) &= \ker(u) \cap \ker(v) \end{aligned}$$

Problème 1 : Dans ce problème, n est un élément de $\mathbb{N}^*$, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie n, son vecteur nul est noté $\vec{0}$ et $\mathcal{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E.

Un endomorphisme φ de E est dit échangeur lorsqu'il existe des sous-espaces vectoriels F et G de E tels que $E = F \oplus G$ et

$$\varphi(F) \subset G \text{ et } \varphi(G) \subset F,$$

c'est-à dire :

$$\forall \vec{u} \in F, \varphi(\vec{u}) \in G \text{ et } \forall \vec{u} \in G, \varphi(\vec{u}) \in F.$$

L'objectif du problème est d'étudier, pour un endomoprhisme φ de E, les liens logiques entre les propriétés suivantes :

(C1) : l'endomorphisme φ est échangeur ;

(C2) : il existe des endomorphismes φ_1 et φ_2 de E tels que $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, $\varphi_1^2 = 0$ et $\varphi_2^2 = 0$ (où $\varphi_j^2 = \varphi_j \circ \varphi_j$ pour $j = 1, 2$).

Partie A : Quelques exemples.

1 On considère l'application :

$$\varphi : \begin{array}{c} \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (0, 3x + z, 2x - y) \end{array}$$

et on pose $\vec{e}_1 = (1, 0, -1)$, $\vec{e}_2 = (1, -1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 1, 1)$, $F = Vect(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et $G = Vect(\vec{e}_3)$.

1a Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ et donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$.

On a :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3x + z \\ 2x - y \end{pmatrix}$$

donc φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ car c'est lendomorphisme canoniquement associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1b Montrer que $F \oplus G = \mathbb{C}^3$.

- F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^3$.
- $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ étant non colinéaires, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est libre. Or elle est génératrice de F donc est une base de F. Donc on a $\dim(F) = 2$
  De manière plus évidente encore, $\dim(G) = 1$ donc :
  $$\dim(F) + \dim(G) = 3 = \dim\left(\mathbb{C}^3\right)$$
- Il suffit donc de montrer que $F \cap G = \left\{\vec{0}\right\}$ pour conclure que $F \oplus G = \mathbb{C}^3$.
  Or soit $\vec{u} \in F \cap G$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\vec{u} = \lambda \vec{e}_3 = (0, \lambda, \lambda)$ et il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $\vec{u} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 = (\alpha + \beta, -\beta, -\alpha)$. Donc :
  $$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -\beta = \lambda \\ -\alpha = \lambda \end{cases}$$
  donc $-2\lambda = 0$ donc $\lambda = 0$ donc $\vec{u} = \vec{0}$. Donc $F \cap G = \left\{\vec{0}\right\}$.

- Conclusion : $F \oplus G = \mathbb{C}^3$.

1c Montrer que $\varphi(F) \subset G$ et $\varphi(G) \subset F$. Que peut-on en déduire ?

- Soit $\vec{u} \in F$. Alors $\vec{u} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 = (\alpha+\beta, -\beta, -\alpha)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Or :
$$M \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ -\beta \\ -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ -\beta \\ -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\alpha+3\beta \\ 2\alpha+3\beta \end{pmatrix} = (2\alpha+3\beta) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
donc $\varphi(\vec{u}) = (2\alpha+3\beta)\vec{e}_3 \in G$. Donc $\varphi(F) \subset G$.
- Soit $\vec{u} \in G$. Alors $\vec{u} = (0, \lambda, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Or $\varphi(\vec{u}) = (0, \lambda, -\lambda) = \lambda(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) \in F$. Donc $\varphi(G) \subset F$.
- φ est donc un échangeur.

2 On pose :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$
$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
et $F = Vect(M_1, M_2)$ et $G = Vect(M_3, M_4)$.
On rappelle qu'en notant $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, la famille $\mathcal{C} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ appelée base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
Soit φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ tel que $Mat_{\mathcal{C}}(\varphi) = A$.

2a Montrer que φ est l'application :
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2a+2c+2d & 0 \\ b-c-d & b-c-d \end{pmatrix}. \end{array}$$

En calculant matriciellement dans la base $\mathcal{C}$ on a :
$$A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+2c+2d \\ 0 \\ b-c-d \\ b-c-d \end{pmatrix}$$
et puisque $A = Mat_{\mathcal{C}}(\varphi)$, on a donc $\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2a+2c+2d & 0 \\ b-c-d & b-c-d \end{pmatrix}$ donc φ est bien l'application :
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2a+2c+2d & 0 \\ b-c-d & b-c-d \end{pmatrix}. \end{array}$$

2b Montrer que $F \oplus G = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

- F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
- M_1 et M_2 sont non colinéaires donc (M_1, M_2) est libre donc est une base de $F = Vect(M_1, M_2)$. Donc $\dim(F) = 2$.
  Les mêmes arguments montrent que $\dim(G) = 2$ donc :
$$\dim(F) + \dim(G) = 4 = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}))$$
- Il suffit donc de montrer que $F \cap G = \{(0)\}$ pour conclure.
  Or, soit $M \in F \cap G$, il existe donc $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $M = aM_1 + bM_2 = cM_3 + dM_4$.
  Donc :
$$M = \begin{pmatrix} -a+b & a-b \\ a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+d & 0 \\ -c & -d \end{pmatrix}$$
  donc
$$\begin{cases} -a+b = c+d \\ a-b = 0 \\ a = -c \\ a = -d \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} c+d = 0 \\ a = b \\ c = -a \\ d = -a \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} -2a = 0 \\ a = b \\ c = -a \\ d = -a \end{cases} \text{ donc } a = b = c = d = 0.$$
  Donc $F \cap G = \{(0)\}$.
- Conclusion : $F \oplus G = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2c Montrer que φ est échangeur.

Montrons que $\varphi(F) \subset G$ et $\varphi(G) \subset F$.

- Soit $M \in F$. Alors $M = \begin{pmatrix} -a+b & a-b \\ a & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{C}$. Or :
$$A \begin{pmatrix} -a+b \\ a-b \\ a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a+b \\ a-b \\ a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a+2b+2a+2a \\ 0 \\ a-b-a-a \\ a-b-a-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+2b \\ 0 \\ -a-b \\ -a-b \end{pmatrix}$$
  donc $\varphi(M) = \begin{pmatrix} 2a+2b & 0 \\ -a-b & -a-b \end{pmatrix} = (a+b) M_3 + (a+b) M_4 \in G$.
  Donc $\varphi(F) \subset G$.
- Soit $M \in G$. Alors $M = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ -a & -b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{C}$. Or :
$$A \begin{pmatrix} a+b \\ 0 \\ -a \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+b \\ 0 \\ -a \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+2b-2a-2b \\ 0 \\ a+b \\ a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a+b \\ a+b \end{pmatrix}$$
  donc $\varphi(M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a+b & a+b \end{pmatrix} = (a+b) M_1 + (a+b) M_2 \in F$
  Donc $\varphi(G) \subset F$.

- Or $F \oplus G = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ donc il en résulte que φ est un échangeur.

Partie B : la notion de trace. Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[|1,n|]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit la trace de A notée $tr(A)$ comme la somme des éléments diagonaux de A :

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

3 Montrer que l'application $tr : \begin{array}{c} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C} \\ A \mapsto tr(A) \end{array}$ est linéaire.

Soient $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a : $\lambda A + \mu B = (\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j})$ donc $tr(\lambda A + \mu B) = \sum\limits_{i=1}^{n} (\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j}) = \lambda \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i} + \mu \sum\limits_{i=1}^{n} b_{i,i} = \lambda tr(A) + \mu tr(B)$.

Donc tr est linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$.

4 Montrer : $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2, \; tr(AB) = tr(BA)$.

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $AB = (c_{i,j})$ avec $c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$ donc

$$\begin{aligned} tr(AB) &= \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} = \sum_{\substack{i=1\ldots n \\ k=1\ldots n}} a_{i,k} b_{k,i} \\ &= \sum_{\substack{i=1\ldots n \\ k=1\ldots n}} b_{k,i} a_{i,k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{k,i} a_{i,k} = tr(BA) \end{aligned}$$

car les éléments diagonaux de BA sont les $\sum\limits_{i=1}^{n} b_{k,i} a_{i,k}$ pour k variant de 1 à n.

Ainsi, $tr(AB) = tr(BA)$.

5 En déduire : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall P \in GL_n(\mathbb{C}), \; tr(PAP^{-1}) = tr(A)$.

On a donc $tr(P^{-1}AP) = tr(APP^{-1}) = tr(AI_n) = tr(A)$.

6 En déduire que pour toutes bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de E, et tout endomorphisme φ de E, on a $tr(Mat_{\mathcal{B}_1}(\varphi)) = tr(Mat_{\mathcal{B}_2}(\varphi))$.

Ainsi, pour tout $\varphi \in L(E)$, le nombre $tr(Mat_{\mathcal{B}}(\varphi))$ ne dépend pas du choix de la base B de E ce qui autorise à appeler trace de φ ce nombre et à poser pour toute base $\mathcal{B}$ de E :

$$tr(\varphi) = tr(Mat_{\mathcal{B}}(\varphi)).$$

Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$. Alors $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $Mat_{\mathcal{B}_2}(\varphi) = P^{-1} Mat_{\mathcal{B}_1}(\varphi) P$ donc $tr(Mat_{\mathcal{B}_1}(\varphi)) = tr(Mat_{\mathcal{B}_2}(\varphi))$ d'après 5.

Partie C : l'exemple des symétries. On rappelle que E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Dans cette partie, E_1 et E_2 sont des sous-espaces supplémentaires dans E non réduits à $\vec{0}$ et s est la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2.

On pose $p = \dim(E_1)$, ce qui entraîne $\dim(E_2) = n - p$.

Soient $\mathcal{B}_1 = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p)$ une base de E_1 et $\mathcal{B}_2 = (\vec{e}_{p+1}, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E_1.

La famille $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est alos une base de E adaptée à la décomposition $E = E_1 \oplus E_2$.

7a Déterminer la matrice de s dans la base $\mathcal{B}$.

Pour $i = 1, \ldots, p$, on a $s(\vec{e}_i) = \vec{e}_i$ et pour $i = p+1, \ldots, n$, on a $s(\vec{e}_i) = -\vec{e}_i$ donc :

$$Mat_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & 1 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & -1 & & \vdots \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ (avec } p \text{ "1" suivis de } n-p \text{ "-1")}$$

7b En déduire en fonction de n et p, la valeur de la trace de s.

Donc $tr(s) = p - (n-p) = 2p - n$.

8 On suppose dans cette question que l'on a $tr(s) = 0$.

8a Montrer que $n = 2p$.

On a $tr(s) = 0$ donc $n = 2p$

On pose $F = Vect\left((\vec{e}_i + \vec{e}_{i+p})_{i\in[|1,p|]}\right)$ et $G = Vect\left((\vec{e}_i - \vec{e}_{i+p})_{i\in[|1,p|]}\right)$

8b Montrer que $F \oplus G = E$.

- Des calculs simples (à faire cependant dans une copie) montre que les familles $(\vec{e}_i + \vec{e}_{i+p})_{i\in[|1,p|]}$ et $(\vec{e}_i - \vec{e}_{i+p})_{i\in[|1,p|]}$ sont libres donc puisqu'elles en sont génératrices, ce sont des bases respectivement de F et de G. Donc $\dim(F) = \dim(G) = p$.
  donc :
  $$\dim(F) + \dim(G) = 2p = n = \dim(E)$$
- Soit $\vec{u} \in F \cap G$. Alors il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{C}$ et $\mu_1, \ldots, \mu_p \in \mathbb{C}$ tels que :
  $$\vec{u} = \lambda_1(\vec{e}_1 + \vec{e}_{p+1}) + \cdots + \lambda_p(\vec{e}_p + \vec{e}_n) = \mu_1(\vec{e}_1 - \vec{e}_{p+1}) + \cdots + \mu_p(\vec{e}_p - \vec{e}_n)$$
  donc :
  $$(\lambda_1 - \mu_1)\vec{e}_1 + \cdots + \left(\lambda_p - \mu_p\right)\vec{e}_p + (\lambda_1 + \mu_1)\vec{e}_{p+1} + \cdots + \left(\lambda_p + \mu_p\right)\vec{e}_n = \vec{0}$$
  Or $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est libre donc pour tout $i \in [|1, \ldots p|]$, $\begin{cases} \lambda_i - \mu_i = 0 \\ \lambda_i + \mu_i = 0 \end{cases}$ donc $\lambda_i = \mu_i = 0$
  donc $\vec{u} = \vec{0}$ donc $F \cap G = \left\{\vec{0}\right\}$.
- $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ et $F \cap G = \left\{\vec{0}\right\}$ donc $F \oplus G = E$.

8c Montrer que $s(F) \subset G$ et $s(G) \subset F$.

On a $F = Vect\left((\vec{e}_i + \vec{e}_{i+p})_{i\in[|1,p|]}\right)$ et pour tout $i \in [|1,p|]$, $s(\vec{e}_i + \vec{e}_{i+p}) = s(\vec{e}_i) + s(\vec{e}_{i+p}) = \vec{e}_i - \vec{e}_{i+p} \in G$ donc par linéarité, $s(F) \subset G$.

De même, pour tout $i \in [|1,p|]$, $s(\vec{e}_i - \vec{e}_{i+p}) = s(\vec{e}_i) - s(\vec{e}_{i+p}) = \vec{e}_i + \vec{e}_{i+p} \in F$, or $G = Vect\left((\vec{e}_i - \vec{e}_{i+p})_{i\in[|1,p|]}\right)$ donc par linéarité, $s(G) \subset F$.

On pose pour tout $i \in [|1,n|]$: $\vec{f_i} = \begin{cases} \vec{e}_i + \vec{e}_{i+p} \text{ si } i \leq p \\ \vec{e}_{i-p} - \vec{e}_i \text{ si } i > p \end{cases}$.

8d Montrer que $\left(\vec{f_i}\right)_{i\in[|1,n|]}$ est une base de E.

D'après ci-dessus, les vecteurs $\left(\vec{f_i}\right)_{i\in[|1,p|]}$ sont ceux qui constituent une base de F et les vecteurs $\left(\vec{f_i}\right)_{i\in[|p+1,n|]}$ ceux qui constituent une base de G.

Comme $F \oplus G = E$, $\left(\vec{f_i}\right)_{i\in[|1,n|]}$ est bien une base de E (adaptée à cette décomposition en sev supplémentaires).

Soit φ_1 l'unique endomorphisme de E tel que $\forall i \in [|1,n|]$, $\varphi_1\left(\vec{f_i}\right) = \begin{cases} \vec{0} \text{ si } i \leq p \\ \vec{f}_{i-p} \text{ si } i > p \end{cases}$.

Soit φ_2 l'unique endomorphisme de E tel que $\forall i \in [|1,n|]$, $\varphi_2\left(\vec{f_i}\right) = \begin{cases} \vec{f}_{i+p} \text{ si } i \leq p \\ \vec{0} \text{ si } i > p \end{cases}$.

8e Montrer que $\varphi_1 + \varphi_2 = s$.

Pour tout $i \in [|1,n|]$:

$$(\varphi_1 + \varphi_2)\left(\vec{f_i}\right) = \begin{cases} \vec{0} + \vec{f}_{i+p} = \vec{f}_{i+p} = \vec{e}_i - \vec{e}_{i+p} = s\left(\vec{e}_i + \vec{e}_{i+p}\right) = s\left(\vec{f_i}\right) \text{ si } i \leq p \\ \vec{f}_{i-p} + \vec{0} = \vec{f}_{i-p} = \vec{e}_{i-p} + \vec{e}_i = s\left(\vec{e}_{i-p} - \vec{e}_i\right) = s\left(\vec{f_i}\right) \text{ si } i > p \end{cases}$$

donc $(\varphi_1 + \varphi_2)\left(\vec{f_i}\right) = s\left(\vec{f_i}\right)$ donc $\varphi_1 + \varphi_2$ et s agissent de la même façon sur une base $(\left(\vec{f_i}\right)_{i\in[|1,n|]})$ donc $\varphi_1 + \varphi_2 = s$.

8f Montrer que $\varphi_1^2 = 0$ et $\varphi_2^2 = 0$.

Evident vu les définitions de φ_1 etφ_2 en le vérifiant encore une fois uniquement sur les vecteurs de la base $\left(\vec{f_i}\right)_{i\in[|1,n|]}$.

8g Qu'a-t-on prouvé dans cette question 8 ?

On a démontré dans la question 8 qu'une symétrie de trace nulle vérifie à la fois les deux conditions (**C1**) et (**C2**).

9 On suppose dans cette question que s est un échangeur. Il existe donc des sous-espaces vectoriels F et G de E tels que $F \oplus G = E$, $s(F) \subset G$ et $s(G) \subset F$.

9a Montrer que $\dim(s(F)) = \dim(F)$ et $\dim(s(G)) = \dim(G)$.

On considère les restrictions $s_{|F}$ et $s_{|G}$ de s respectivement à F et à G.

s est une bijection (comme toute symétrie) donc est injective donc ses restictions aussi.

D'autre part, $\text{Im}\left(s_{|F}\right) = s(F)$ et $\text{Im}\left(s_{|G}\right) = s(G)$ donf la formule du rang appliquée à ces restrictions donne :

$$\dim(s(F)) = \dim(F) \text{ et } \dim(s(G)) = \dim(G)$$

9b En déduire $\dim(F) = \dim(G)$, puis $tr(s) = 0$.

Or $s(F) \subset G$ et $s(G) \subset F$ donc $\dim(s(F)) \leq \dim(G)$ et $\dim(s(G)) \leq \dim(F)$.

En utilisant $9a$, il vient $\dim(F) \leq \dim(G)$ et $\dim(G) \leq \dim(F)$ donc $\dim(F) = \dim(G)$.

Partie D :La propriété (C1) implique (C2). Soient p et q deux entiers naturels non nuls. On admettra le résultat suivant. Sa preuve repose uniquement sur la définition du produit matriciel.

Proposition : Soient $A, A' \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, $B, B' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, $C, C' \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{C})$, $D, D' \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$. On pose :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{C}) \text{ et } M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{C}).$$

Alors le produit matriciel MM' est égal à :

$$MM' = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{C}).$$

Pour tous $r, s \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $0_{r,s}$ la matrice nulle de taille (r, s) et on pose $0_r = 0_{r,s}$.
Soient $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$. On considère dans $\mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{C})$ la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0_p & B \\ A & 0_q \end{pmatrix}.$$

10 Calculer le carré de la matrice $\begin{pmatrix} 0_p & B \\ 0_{q,p} & 0_q \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{C})$. Montrer ensuite que M est la somme de deux matrices de carré nul.

On a $\begin{pmatrix} 0_p & B \\ 0_{q,p} & 0_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0_p & B \\ 0_{q,p} & 0_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & 0_q \end{pmatrix} = 0_{p+q}$.

Or on a $M = \begin{pmatrix} 0_p & B \\ 0_{q,p} & 0_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_p & 0_{p,q} \\ A & 0_q \end{pmatrix}$ et on vérifie de même que $\begin{pmatrix} 0_p & 0_{p,q} \\ A & 0_q \end{pmatrix}$ est de carré nul donc M est la somme de deux matrices de carré nul.

Jusqu'à la fin de cette partie, on se donne un endomorphisme φ du $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que φ est un échangeur et on se donne donc une décomposition $E = F \oplus G$, où F et G sont des sous-espaces vectoriels de E tels que $\varphi(F) \subset G$ et $\varphi(G) \subset F$.

11 On suppose ici F et G tous deux non réduits à $\left\{\vec{0}\right\}$.

On se donne une base $\mathcal{B}_F = \left(\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_p\right)$ de F et une base $\mathcal{B}_G = (\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_q)$ de G où $q = n - p$.

La famille $\mathcal{B} = \left(\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_p, \vec{g}_1, \ldots \vec{g}_q\right)$ est donc une base de E adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$

Compte-tenu des hypothèses, décrire la forme de la matrice de φ dans $\mathcal{B}$.

Cette matrice est de la forme $M = \begin{pmatrix} 0_p & B \\ A & 0_q \end{pmatrix}$, les p premières colonnes exprimant le fait que $\varphi(F) \subset G$ et les q dernières le fait que $\varphi(G) \subset F$.

12 Déduire des question précédentes que φ vérifie la propriété (**C2**). On n'oubliera pas de considérer le cas où l'un des sous-espaces vectoriels F ou G est réduit à $\left\{\vec{0}\right\}$.

- Cas où ni F ni G n'est réduit à $\left\{\vec{0}\right\}$. Notons φ_1 (respectivement φ_2) l'endomorphisme de E de matrice dans la base $\mathcal{B}$: $M_1 = \begin{pmatrix} 0_p & 0_{p,q} \\ A & 0_q \end{pmatrix}$, (respectivement $M_2 = \begin{pmatrix} 0_p & B \\ 0_{q,p} & 0_q \end{pmatrix}$).

  Vu les propriétés $M = M_1 + M_2$, $M_1^2 = 0_{p+q}$ et $M_2^2 = 0_{p+q}$, on a :

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2; \varphi_1^2 = 0 \text{ et } \varphi_2^2 = 0$$

donc φ vérifie la proriété $(\mathbf{C2})$.

- Cas où $F=\left\{\vec{0}\right\}$ donc $G=E$. On a $\varphi(G)\subset F$ donc φ est l'endomorphisme nul. On peut prendre $\varphi_1=\varphi_2=0$ pour voir que φ vérifie la proriété $(\mathbf{C2})$.
- Cas où $G=\left\{\vec{0}\right\}$ donc $F=E$. Idem en échangeant F et G.

Partie E : la propriété (C2) implique (C1) pour un automorphisme. Dans cette partie, φ désigne un automorphisme bijectif du $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension $n\in\mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe deux endomorphismes φ_1 et φ_2 de E tels que :

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2 \text{ et } \varphi_1^2=\varphi_2^2=0.$$

13 Soit ψ un endomorphisme de E tel que $\psi^2=0$. Comparer $\ker(\psi)$ et $\mathrm{Im}(\psi)$ et en déduire :

$$\dim(\ker(\psi))\geq\frac{1}{2}\dim(E).$$

Soit $\vec{v}\in\mathrm{Im}(\psi)$, alors il existe $\vec{u}\in E$ tel que $\vec{v}=\psi(\vec{u})$. Or $\psi^2=0$ donc $\psi(\psi(\vec{u}))=\vec{0}$ ie. $\psi(\vec{v})=\vec{0}$ donc $\vec{v}\in\ker(\psi)$. Ainsi $\mathrm{Im}(\psi)\subset\ker(\psi)$.
Donc $rg(\psi)\leq\dim(\ker(\psi))$.
Or d'après la formule du rang, $rg(\psi)=\dim(E)-\dim(\ker(\psi))$ donc $\dim(\ker(\psi))\geq\frac{1}{2}\dim(E)$.

14 Démontrer que $E=\ker(\varphi_1)\oplus\ker(\varphi_2)$ et $\ker(\varphi_1)=\mathrm{Im}(\varphi_1)$ et $\ker(\varphi_2)=\mathrm{Im}(\varphi_2)$.

On a $\varphi_1^2=\varphi_2^2=0$ donc d'après 14, $\dim(\ker(\varphi_1))\geq\frac{1}{2}\dim(E)$ et $\dim(\ker(\varphi_2))\geq\frac{1}{2}\dim(E)$ donc :

$$\dim(\ker(\varphi_1))+\dim(\ker(\varphi_2))\geq\dim(E)$$

Soit $\vec{u}\in\ker(\varphi_1)\cap\ker(\varphi_2)$. Alors $\varphi(\vec{u})=\varphi_1(\vec{u})+\varphi_2(\vec{u})=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$ donc $\vec{u}\in\ker(\varphi)$.
Mais φ est injective donc $\ker(\varphi)=\left\{\vec{0}\right\}$ donc $\vec{u}=\vec{0}$. Donc $\ker(\varphi_1)\cap\ker(\varphi_2)=\left\{\vec{0}\right\}$.
Ainsi, la somme est directe : $\ker(\varphi_1)+\ker(\varphi_2)=\ker(\varphi_1)\oplus\ker(\varphi_2)$.
Donc $\dim(\ker(\varphi_1)+\ker(\varphi_2))=\dim(\ker(\varphi_1))+\dim(\ker(\varphi_2))$.
Donc $\dim(\ker(\varphi_1))+\dim(\ker(\varphi_2))\leq\dim(E)$ puisque $\ker(\varphi_1)+\ker(\varphi_2)\subset E$.
Ainsi $\dim(\ker(\varphi_1))+\dim(\ker(\varphi_2))=\dim(E)$ et puisque $\ker(\varphi_1)\cap\ker(\varphi_2)=\left\{\vec{0}\right\}$ on a :

$$E=\ker(\varphi_1)\oplus\ker(\varphi_2)$$

De plus, les inégalités $\dim(\ker(\varphi_1))\geq\frac{1}{2}\dim(E)$ et $\dim(\ker(\varphi_2))\geq\frac{1}{2}\dim(E)$ sont forcément des égalités (sans quoi $\dim(\ker(\varphi_1))+\dim(\ker(\varphi_2))>\dim(E)$).
Donc $\dim(\ker(\varphi_1))=\frac{1}{2}\dim(E)$ et $\dim(\ker(\varphi_2))=\frac{1}{2}\dim(E)$. Et par la formule du rang, $\dim(\ker(\varphi_1))=\dim(\mathrm{Im}(\varphi_1))$ et $\dim(\ker(\varphi_2))=\dim(\mathrm{Im}(\varphi_2))$.
Et puisque $\mathrm{Im}(\varphi_1)\subset\ker(\varphi_1)$ et $\mathrm{Im}(\varphi_2)\subset\ker(\varphi_2)$, il vient $\mathrm{Im}(\varphi_1)=\ker(\varphi_1)$ et $\mathrm{Im}(\varphi_1)=\ker(\varphi_1)$.

15 En déduire que φ est un échangeur.

Posons $F=\mathrm{Im}(\varphi_1)=\ker(\varphi_1)$ et $G=\mathrm{Im}(\varphi_2)=\ker(\varphi_2)$.

On a $F \oplus G = E$.
Soit $\vec{u} \in F$:

$$\varphi(\vec{u}) = \varphi_1(\vec{u}) + \varphi_2(\vec{u}) = \varphi_2(\vec{u}) \in \mathrm{Im}(\varphi_2) = G$$

donc $\varphi(F) \subset G$.
$\varphi(F) \subset G$ se démontre de la même façon donc φ est un échangeur.

Corrigé de l'exercice : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (pas forcément de dimension finie).
0 désigne l'application nulle de E.
Pour tout réel k, on définit l'ensemble $A_k = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u^2 = ku\}$, où $u^2 = u \circ u$.

1 Soit f un endomorphisme de E. On suppose que f est de rang 1, ce qui signifie que son image $\mathrm{Im}(f)$ est une droite vectorielle.
Montrer qu'il existe un réel k tel que $f \in A_k$.
$\mathrm{Im}(f)$ est une droite vectorielle donc il existe $\overrightarrow{a} \in E$ non nul tel que $\mathrm{Im}(f) = Vect(\overrightarrow{a})$.
$f(\overrightarrow{a}) \in \mathrm{Im}(f)$ donc il existe k tel que $f(\overrightarrow{a}) = k\overrightarrow{a}$.
Pour tout $\overrightarrow{x} \in E$, il existe λ_x tel que $f(\overrightarrow{x}) = \lambda_x \overrightarrow{a}$ et on a :

$$f^2(\overrightarrow{x}) = f(\lambda_x \overrightarrow{a}) = \lambda_x f(\overrightarrow{a}) = \lambda_x k \overrightarrow{a} = kf(\overrightarrow{x})$$

Donc $f^2 = kf$.

2 Soit $u \in A_k$ avec $k \neq 0$.

2a Montrer qu'il existe un réel non nul λ tel que $g = \lambda u$ soit un projecteur de E.
$g^2 = \lambda^2 u^2 = \lambda^2 ku$ donc $g^2 = g \Leftrightarrow \lambda^2 ku = \lambda u$, ce qui est vérifié pour $\lambda = \dfrac{1}{k}$.
g étant linéaire, g est alors un projecteur de E.

2b Montrer que $\ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u) = E$
On a alors $\ker(g) \oplus \mathrm{Im}(g) = E$.
Or $\overrightarrow{x} \in \ker(g) \Leftrightarrow g(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \dfrac{1}{k}u(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow u(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{x} \in \ker(u)$ donc $\ker(g) = \ker(u)$
et $\overrightarrow{y} \in \mathrm{Im}(g) \Leftrightarrow$ il existe $\overrightarrow{x} \in E$, $\overrightarrow{y} = g(\overrightarrow{x}) = \dfrac{1}{k}u(\overrightarrow{x}) = u\left(\dfrac{1}{k}\overrightarrow{x}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{y} \in \mathrm{Im}(u)$ donc $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(u)$. Donc on a :

$$\ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u) = E$$

3 Soient $u, v \in A_k$ avec $k \neq 0$.

3a Montrer que si $u \circ v + v \circ u = 0$ alors $u \circ v = v \circ u = 0$.
Si $u \circ v + v \circ u = 0$, alors $u \circ v = -v \circ u$ et $-u \circ v \circ v = v \circ u \circ v = -v \circ v \circ u$ donc $u \circ v \circ v = v \circ v \circ u$ donc $ku \circ v = kv \circ u = -ku \circ v$ donc $u \circ v = 0$ et aussi $v \circ u = 0$.

3b A quelle condition nécessaire et suffisante $u + v$ est-il aussi dans A_k? Montrer que dans ce cas :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(u+v) &= \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v) \\ \ker(u+v) &= \ker(u) \cap \ker(v) \end{aligned}$$

$(u+v)^2 = u^2 + v^2 + u \circ v + v \circ u = ku + kv + u \circ v + v \circ u$ donc :

$$\begin{aligned} u+v &\in A_k \Leftrightarrow (u+v)^2 = k(u+v) \\ &\Leftrightarrow u \circ v + v \circ u = 0 \\ &\Leftrightarrow u \circ v = v \circ u = 0 \text{ d'après } 3.a \text{ car la réciproque est évidente.} \end{aligned}$$

$\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$ est évident.
Réciproquement, si $y \in \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$, alors il existe $a, b \in E$ tels que $y = u(a) + v(b)$.
Alors :

$$\begin{aligned} (u+v)(y) &= u(u(a) + v(b)) + v(u(a) + v(b)) \\ &= ku(a) + u \circ v(b) + v \circ u(a) + kv(b) \\ &= ku(a) + kv(b) \text{ car } u \circ v = v \circ u = 0 \\ &= ky \end{aligned}$$

Donc $y = (u+v)\left(\dfrac{y}{k}\right) \in \mathrm{Im}(u+v)$.
Par double inclusion, on a $\mathrm{Im}(u+v) = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$.
Enfin, $\ker(u) \cap \ker(v) \subset \ker(u+v)$ est élémentaire et réciproquement, si $x \in \ker(u+v)$, alors $(u+v)(x) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned} 0 &= u(0) = u(u(x) + v(x)) = u^2(x) + u \circ v(x) = ku(x) \text{ donc } u(x) = 0 \\ 0 &= v(0) = v(u(x) + v(x)) = v^2(x) + v \circ u(x) = kv(x) \text{ donc } v(x) = 0 \end{aligned}$$

donc $x \in \ker(u) \cap \ker(v)$. Ainsi, $\ker(u+v) = \ker(u) \cap \ker(v)$.