D.S.8 1er Juin 2024

Exercice 1 : Deux calculs de déterminant : les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1 Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $A(x)$ la matrice dont le terme général est $a_{i,j} + x$.

1a Montrer que la fonction $f : x \mapsto \det(A(x))$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 1.

1b Pour a et b deux réels distincts et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, en déduire la valeur du déterminant suivant :

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & a & \cdots & a \\ b & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & \alpha_n \end{vmatrix}$$

2 Soient $s_1, \cdots s_n \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant suivant :

$$D_n(s_1, \ldots, s_n) = \begin{vmatrix} s_1 & \cdots & \cdots & s_1 \\ \vdots & s_2 & \cdots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \end{vmatrix}.$$

Indication : on pourra trouver une formule et la démontrer en rédigeant une récurrence.

Exercice 2 : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$b_n = n(a_n - a_{n+1}), \ A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ et } B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

1 On prend **dans cette question uniquement** pour tout $n \geq 1$, $a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

1a Vérifier que la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge et calculer sa somme (remarquez que $n \geq 1$!!!).

1b Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer soigneusement que la série $\sum_{n\geq 1} nx^{n-1}$ converge si et seulement si $x \in \left]-1,1\right[$. (indication : utiliser une croissance comparée).

1c En remarquant que $x^n = (n+1)x^n - nx^n$, vérifier que si $x \in \left]-1,1\right[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

1d Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge et que sa somme est égale à 2.

2 On prend **dans cette question uniquement** pour tout $n \geq 2$, $a_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$ et $a_1 = 0$.

2a Etudier la monotonie et la convergence de la suite $(a_n)_{n\geq 2}$.

2b A l'aide d'une comparaison à une intégrale, montrer que la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ diverge.

2c Calculer $\lim_{n\to+\infty} na_n$.

2d Montrer que $(n+1)\ln(n+1) - n\ln(n) \sim_{+\infty} \ln(n)$, en déduire un équivalent de b_n puis la nature de la série $\sum_{n\geq 1} b_n$.

3 Ce résultat pourra servir dans les questions 4 et 5. Montrer que :

$$B_n = A_{n+1} - (n+1)\, a_{n+1}.$$

4 On suppose **dans cette question uniquement** que la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs.

Pour tout entier naturel n non nul, on note $u_n = \sum_{p=n+1}^{2n} a_p$.

4a Déterminer la limite de la suite (u_n).

4b En déduire que $\lim_{n\to+\infty} na_{2n} = 0$.

4c Montrer alors que $\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$.

4d Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge.

4e A-t-on $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$?

5 On suppose **dans cette question uniquement** que la série $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et de limite nulle.

5a Vérifier que pour tous entiers m, n tels que $1 \leq m \leq n$, on a $B_n \geq A_m - ma_{n+1}$.

5b En déduire que $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.

5c Peut-on en déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$?

Exercice 3 : Etude d'un dépassement de seuil.

On dispose d'une urne contenant deux boules, l'une numérotée 1 l'autre numérotée 2. On effectue dans cette urne une succession de tirages au hasard d'une boule, en notant le numéro obtenu, la boule tirée étant remise dans l'urne après chaque tirage.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro tiré au rang n. On a donc $P(X_n = 1) = P(X_n = 2) = \dfrac{1}{2}$. De plus, les variables $(X_1, \ldots, X_n)$ sont mutuellement indépendantes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, S_n désigne donc la somme des numéros obtenus après n tirages.

Pour $N \in \mathbb{N}^*$ donné, on considère la variable aléatoire T_N égale au rang n où *pour la première fois*, on a $S_n > N$.

Par exemple, si $N = 5$ et si les premiers numéros tirés sont $2, 1, 2, 1, 1, \ldots$, alors $T_5 = 4$.

De même si $N = 5$ et les premiers numéros tirés sont $2, 2, 2, 1, 2, \ldots$, alors $T_5 = 3$.

1 Préliminaires :

1a On considère la suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $v_1 = \dfrac{5}{6}$, $v_2 = \dfrac{11}{12}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_{n+2} = \frac{1}{2}(v_{n+1} + v_n).$$

Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \lambda + \mu\alpha^n$ pour des constantes λ, μ et α que l'on déterminera.

1b On considère la suite réelle $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $w_1 = \dfrac{3}{2}$, $w_2 = \dfrac{9}{4}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$w_{n+2} = \frac{1}{2}(w_{n+1} + w_n) + 1.$$

En considérant la suite $v_n = w_n - \dfrac{2n}{3}$, se ramener à la question précédente et en déduire la valeur de w_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

2 Exemples :

2a Déterminer les lois de T_1 et T_2 ainsi que leurs espérances et variances.

2b Déterminer $T_5(\Omega)$.

2c Sans justifier vos calculs, dresser dans un tableau les probabilités $P(T_5 = i, X_1 = j)$ pour $i \in [|3, 6|]$ et $j \in \{1, 2\}$.

2d Déterminer la loi de T_5.

3 Calcul de l'espérance de T_N : on revient au cas général où $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq 2$.

3a Déterminer la plus petite et la plus grande valeur de T_N dans le cas où N est pair. Même question dans le cas où N est impair.

3b Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 3$. On rappelle que $S_k = \sum\limits_{n=1}^{k} X_n$. On pose aussi $S'_k = \sum\limits_{n=2}^{k} X_n$.

On admettra que le couple $\left(S'_{k-1}, S'_k\right)$ *a même loi (conjointe) que le couple* (S_{k-2}, S_{k-1}).

Justifier que $(X_1 = 2) \cap (T_{N+2} = k) = (X_1 = 2) \cap (S'_k > N) \cap \left(S'_{k-1} \leq N\right)$.

En déduire que $P\left((X_1 = 2) \cap (T_{N+2} = k)\right) = \frac{1}{2} P\left(T_N = k - 1\right)$.

Conclure que $P\left(T_{N+2} = k\right) = \frac{1}{2} P\left(T_{N+1} = k - 1\right) + \frac{1}{2} P\left(T_N = k - 1\right)$.

Vérifier que cette formule est encore valable si $k = 1$ ou $k = 2$.

3c Justifier les égalités suivantes en prêtant attention aux bornes des sommes :

$$E\left(T_{N+2}\right) = \sum_{k=1}^{N+3} kP\left(T_{N+2} = k\right) \text{ et } E\left(T_N\right) = \sum_{k=1}^{N+2} kP\left(T_N = k\right)$$

En déduire l'égalité : $E\left(T_{N+2}\right) = \frac{1}{2}\left(E\left(T_{N+1}\right) + E\left(T_N\right)\right) + 1$.

3d A l'aide du préliminaire, prouver que $E\left(T_N\right) = \dfrac{6N + 8}{9} + \dfrac{1}{9}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^N$.

Quelle est la limite de la suite de terme général $\dfrac{E\left(T_N\right)}{N}$? Ce résultat est-il plausible (expliquez !) ?

Exercice 4 : n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. E est un espace euclidien de dimension n dont on note le produit scalaire $(. \mid .)$ et la norme associée $\|.\|$.

On suppose que $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots \overrightarrow{e_n})$ est une base orthonormée de E.

On considère l'endomorphisme f de E tel que pour tout $i = 1, \ldots, n$, $f\left(\overrightarrow{e_i}\right) = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \cdots + \overrightarrow{e_n}$.

Etant donnés n réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$, on note $m = \min\left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)$ et on suppose que $m > n$.

On note d l'endomorphisme de E tel que pour tout $i = 1, \ldots, n$, $d\left(\overrightarrow{e_i}\right) = a_i \overrightarrow{e_i}$.

On note enfin g l'endomorphisme de E défini par $g = f + d$.

1 Représenter les matrices de f et d dans la base $\mathcal{B}$.

2a On note $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \cdots + \overrightarrow{e_n}$, exprimer $f\left(\overrightarrow{w}\right)$ en fonction de $\overrightarrow{w}$.

2b Déterminer $\operatorname{Im}(f)$ et en préciser une base orthonormée.

2c Prouver que $\ker(f)$ est le sous-espace vectoriel de E de base $(\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_1}, \ldots \overrightarrow{e_n} - \overrightarrow{e_1})$.

2d En déduire que $\operatorname{Im}(f) = (\ker(f))^{\perp}$.

2e Expliquer alors comment obtenir une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de E telle que $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

(on ne demande pas d'expliciter les vecteurs de la base $\mathcal{B}'$).

2f En déduire que pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, $\|f\left(\overrightarrow{u}\right)\| \leq n \left\|\overrightarrow{u}\right\|$.

3a Justifier que d est un automorphisme de E.

3b Montrer que pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, $\|d(\overrightarrow{u})\| \geq m\|\overrightarrow{u}\|$ et que pour tout $\overrightarrow{v} \in E$, $\|d^{-1}(\overrightarrow{v})\| \leq \dfrac{1}{m}\|\overrightarrow{v}\|$.

3c Vérifier que pour tout vecteur non nul $\overrightarrow{u} \in E$, $\|f(\overrightarrow{u})\| < \|d(\overrightarrow{u})\|$.

3d En déduire en étudiant $\ker(g)$ que g est un automorphisme de E.

4 Soit un vecteur $\overrightarrow{v}$ fixé de E. Il existe d'après le $2.d$ un unique vecteur $\overrightarrow{u}$ de E tel que $g(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$.

4a Vérifier que $\overrightarrow{u} = d^{-1}(\overrightarrow{v}) - (d^{-1} \circ f)(\overrightarrow{u})$.

On considère alors la suite $(\overrightarrow{u_k})_{k\in\mathbf{N}}$ de vecteurs de E définie par :

$$\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{u_0} = \overrightarrow{v} \\ \forall k \in \mathbf{N},\ \overrightarrow{u_{k+1}} = d^{-1}(\overrightarrow{v}) - (d^{-1} \circ f)(\overrightarrow{u_k}) \end{array}\right.$$

4b Montrer que pour tout entier naturel k, $\overrightarrow{u_{k+1}} - \overrightarrow{u} = -(d^{-1} \circ f)(\overrightarrow{u_k} - \overrightarrow{u})$.

4c En déduire que pour tout entier naturel k, $\|\overrightarrow{u_{k+1}} - \overrightarrow{u}\| \leq \dfrac{n}{m}\|\overrightarrow{u_k} - \overrightarrow{u}\|$.

Montrer enfin que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \|\overrightarrow{u_k} - \overrightarrow{u}\| = 0$.

Corrigé exercice 1 : On retranche la première colonne à toutes les autres puis on fait un développement par rapport à la première colonne :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \begin{vmatrix} a_{1,1}+x & a_{1,2}+x & \cdots & a_{1,n}+x \\ a_{2,1}+x & a_{2,2}+x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n}+x \\ a_{n,1}+x & \cdots & a_{n,n-1}+x & a_{n,n}+x \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{1,1}+x & a_{1,2}-a_{1,1} & \cdots & a_{1,n}-a_{1,1} \\ a_{2,1}+x & a_{2,2}-a_{2,1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n}-a_{n-1,1} \\ a_{n,1}+x & \cdots & a_{n,n-1}+x & a_{n,n}-a_{n,1} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} (a_{i,1}+x) \det (A_i)
\end{aligned}$$

où A_i est une matrice ne dépendant pas de x. Donc $f(x)$ est polynomiale en x de degré au plus 1.

1b Soit $D(x)$ le déterminant obtenu en prenant $A = D$ ci-dessus.

On cherche donc $D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & a & \cdots & a \\ b & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & \alpha_n \end{vmatrix} = D(0)$.

Or d'après 1, $D(x) = \lambda x + \mu$ pour deux réels λ et μ. Et on a :

$$D(-b) = \begin{vmatrix} \alpha_1-b & a-b & \cdots & a-b \\ 0 & \alpha_2-b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a-b \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n-b \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n} (\alpha_k - b)$$

et de même :

$$D(-a) = \begin{vmatrix} \alpha_1-a & 0 & \cdots & 0 \\ b-a & \alpha_2-a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ b-a & \cdots & b-a & \alpha_n-a \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n} (\alpha_k - a)$$

Donc :

$$\begin{cases} -\lambda b + \mu = \prod\limits_{k=0}^{n} (\alpha_k - b) = D(-b) \\ -\lambda a + \mu = \prod\limits_{k=0}^{n} (\alpha_k - a) = D(-a) \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{D(-b) - D(-a)}{a-b} \\ \mu = \dfrac{aD(-b) - bD(-a)}{a-b} \end{cases}$$

Donc :

$$D = D(0) = \mu = \frac{aD(-b) - bD(-a)}{a-b} = \frac{a\prod_{k=0}^{n}(\alpha_k - b) - b\prod_{k=0}^{n}(\alpha_k - a)}{a-b}$$

2 Notons $D(s_1, \dots, s_n)$ ce déterminant. Par opérations sur les colonnes $C_j \leftharpoondown C_j - C_1$ pour j de 2 à n on a :

$$\begin{aligned} D(s_1, \dots, s_n) &= \begin{vmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & s_2 - s_1 & \cdots & s_2 - s_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 - s_1 & \cdots & s_n - s_1 \end{vmatrix} \\ &= s_1 \begin{vmatrix} s_2 - s_1 & \cdots & s_2 - s_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_2 - s_1 & \cdots & s_n - s_1 \end{vmatrix} \text{ par dévlpt \% 1ère ligne} \\ &= s_1 D(s_2 - s_1, \cdots, s_n - s_1) \end{aligned}$$

De même, $D(s_2 - s_1, \cdots, s_n - s_1) = (s_2 - s_1) D(s_3 - s_2, \dots, s_n - s_2)$ car $s_j - s_1 - (s_2 - s_1) = s_j - s_2$.
Donc

$$\begin{aligned} D(s_1, \dots, s_n) &= s_1 (s_2 - s_1) D(s_3 - s_2, \dots, s_n - s_2) \\ &= s_1 (s_2 - s_1)(s_3 - s_2) D(s_4 - s_3, \dots, s_n - s_3) \text{ par le même procédé} \end{aligned}$$

On comprend que la formule à démontrer est $D(s_1, \dots, s_n) = s_1 (s_2 - s_1)(s_3 - s_2) \cdots (s_n - s_{n-1})$ et elle se démontre sans difficulté par récurrence en utilisant les calculs ci-dessus.

Corrigé exercice 2 : Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$b_n = n(a_n - a_{n+1}), \ A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ et } B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

1 On prend dans cette question uniquement pour tout $n \geq 1$, $a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

1a Vérifier que la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge et calculer sa somme (remarquez que $n \geq 1$!!!).

C'est une série géométrique de raison $\dfrac{1}{2} \in]-1, 1[$ donc c'est une série convergente et de somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1 \times \frac{1}{1 - 1/2} = 2$$

1b Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer soigneusement que la série $\sum_{n \geq 1} n x^{n-1}$ converge si et seulement si $x \in]-1, 1[$. (indication : utiliser une croissance comparée).

- Si $x \notin]-1, 1[$, $\lim_{n \to +\infty} |n x^{n-1}| = +\infty$ donc la série $\sum_{n \geq 1} n x^{n-1}$ est grossièrement divergente donc divergente.

- Si $x = 0$, la série est la série nulle et est convergente.
- Si $x \in \left]-1, 1\right[$ et $x \neq 0$, on a par croissance comparée $\lim_{n \to +\infty} |n^3 x^{n-1}| = 0$ car $|n^3 x^{n-1}| = \frac{1}{|x|} n^3 |x|^n = \frac{1}{|x|} n^3 e^{n \ln(|x|)} = \frac{1}{|x|} \frac{n^3}{e^{-n \ln(|x|)}}$ et $-\ln(|x|) > 0$.

  Donc $|nx^{n-1}| = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Or la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente donc la série $\sum_{n \geq 1} nx^{n-1}$ est absolument convergente donc convergente.

1c En remarquant que $x^n = (n+1) x^n - nx^n$, vérifier que si $x \in \left]-1, 1\right[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Soit $x \in \left]-1, 1\right[$. On a pour tout $N \geq 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} x^n &= \sum_{n=1}^{N} ((n+1) x^n - nx^n) = \sum_{n=1}^{N} (n+1) x^n - x \sum_{n=1}^{N} nx^{n-1} \\ &= \sum_{k=2}^{N+1} kx^{k-1} - x \sum_{n=1}^{N} nx^{n-1} \text{ en posant } k = n+1 \end{aligned}$$

Tous les termes convergent lorsque N tend vers $+\infty$ et on obtient alors par passage à la limite :

$$\begin{aligned} \frac{x}{1-x} &= \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \sum_{k=2}^{+\infty} kx^{k-1} - x \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} - 1 - x \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = (1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} - 1 \end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{1}{1-x} = \frac{x}{1-x} + 1 = (1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$$

donc $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Remarque : on peut calculer directement avec les sommes de séries plutôt qu'avec les sommes partielles mais il faut préciser que les sommes qui apparaissent sont toutes des sommes de séries convergentes.

1d Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} b_n$ converge et que sa somme est égale à 2.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$b_n = n (a_n - a_{n+1}) = n \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n} \right) = n \frac{1}{2^{n-1}} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} n \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}.$$

D'après 1*b* avec $x = \frac{1}{2} \in \left]-1, 1\right[$: la série $\sum_{n \geq 1} b_n$ converge et d'après 1*c*, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2} \right)^2} = \frac{1}{2}.4 = 2$$

2 On prend dans cette question uniquement pour tout $n \geq 2$, $a_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$ et $a_1 = 0$.

2a Etudier la monotonie et la convergence de la suite $(a_n)_{n\geq 2}$.

On pose $f(t) = \dfrac{1}{t\ln(t)}$ pour tout $t > 0$. f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et pour tout $t > 0$, $f'(t) = -\dfrac{1+\ln(t)}{t^2(\ln(t))^2}$ d'où les variations suvantes :

t	0		$1/e$		$+\infty$
$f'(t)$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(t)$	$\|$	$\nearrow$	$\|$	$\searrow_{\to 0}$	

Sur $\left[\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$, f est décroissante et positive.

Or si $n \geq 2$, alors $n \in \left[\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$ donc $a_{n+1} = f(n+1) \leq a_n = f(n)$ donc $(a_n)_{n\geq 2}$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

2b A l'aide d'une comparaison à une intégrale, montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ diverge.

Pour $k \geq 2$, f est décroissante sur $[k, k+1]$ donc

$$\forall t \in [k, k+1],\ \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \frac{1}{t\ln(t)} \leq \frac{1}{k\ln(k)}$$

donc par intégration d'inégalités :

$$a_{k+1} = \int_k^{k+1} a_{k+1}dt \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t\ln(t)} \leq \int_k^{k+1} a_k dt = a_k$$

Pour $n \geq 2$, on somme pour k allant de 2 à n :

$$\sum_{k=2}^{n} a_{k+1} \leq \int_2^{n+1} \frac{dt}{t\ln(t)} \leq \sum_{k=2}^{n} a_k$$

i.e. :

$$A_n + a_{n+1} - a_2 - a_1 \leq [\ln(\ln(t))]_2^{n+1} \leq A_n - a_1$$

et puisque $a_1 = 0$, en particulier $A_n \geq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2))$ donc par théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = +\infty$ donc la série $\sum a_n$ diverge.

2c Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n$.

On a $na_n = \dfrac{1}{\ln(n)}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$.

2d Montrer que $(n+1)\ln(n+1) - n\ln(n) \sim_{+\infty} \ln(n)$, en déduire un équivalent de b_n puis la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$.

On a :

$$\begin{aligned}(n+1)\ln(n+1)-n\ln(n) &= (n+1)\left(\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)-n\ln(n)\\ &= \ln(n)+(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &= \ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

donc $\dfrac{(n+1)\ln(n+1)-n\ln(n)}{\ln(n)}=1+\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$.

Or $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1/n}$ donc par composition avec une limite fondamentale :

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}=0$ donc $(n+1)\ln(n+1)-n\ln(n)\sim_{+\infty}\ln(n)$.

D'autre part :

$$b_n=n\left(a_n-a_{n+1}\right)=n\left(\frac{1}{n\ln(n)}-\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\right)=\frac{(n+1)\ln(n+1)-n\ln(n)}{(n+1)\ln(n)\ln(n+1)}$$

et $(n+1)\ln(n)\ln(n+1)\sim_{+\infty} n\left(\ln(n)\right)^2$ car facilement $\ln(n+1)\sim_{+\infty}\ln(n)$ donc par quotient d'équivalents : $b_n\sim_{+\infty}\dfrac{1}{n\ln(n)}$.

D'après 2b, la série $\sum\limits_{n\geq 2}\dfrac{1}{n\ln(n)}$ est divergente et $b_n\sim_{+\infty}\dfrac{1}{n\ln(n)}$ et ces séries sont à termes positifs donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ est divergente.

3 montrer que $B_n=A_{n+1}-(n+1)\,a_{n+1}$.

On a

$$\begin{aligned}B_n &= \sum_{k=1}^{n}k\left(a_k-a_{k+1}\right)=\sum_{k=1}^{n}ka_k-\sum_{k=1}^{n}ka_{k+1}\\ &= \sum_{k=1}^{n}ka_k-\sum_{k=1}^{n}(k+1)\,a_{k+1}+\sum_{k=1}^{n}a_{k+1}\\ &= a_1-(n+1)\,a_{n+1}+A_{n+1}-a_1\\ &= A_{n+1}-(n+1)\,a_{n+1}.\end{aligned}$$

4 On suppose dans cette question uniquement que la série $\sum\limits_{n\geq 1}a_n$ converge et que la suite $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs.

Pour tout entier naturel n non nul, on note $u_n=\sum\limits_{p=n+1}^{2n}a_p$.

4a Déterminer la limite de la suite (u_n).

On a $u_n = A_{2n} - A_n$. Or la série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ converge donc la suite (A_n) converge donc la suite (extraite) (A_{2n}) converge vers la même limite (finie!) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4b En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} na_{2n} = 0$.

La suite (a_n) est décroissante donc pour tout $p \in [|n+1, 2n|]$, $a_{2n} \leq a_p$ donc par somme de $p = n+1$ à $2n$, il vient :

$$\sum_{p=n+1}^{2n} a_{2n} \leq \sum_{p=n+1}^{2n} a_p \text{ i.e., } na_{2n} \leq u_n$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq na_{2n} \leq u_n$ donc par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} na_{2n} = 0$.

4c Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$.

On a donc aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} 2na_{2n} = 0$. D'autre part :

$$0 \leq (2n+1)\, a_{2n+1} \leq (2n+1)\, a_{2n} = a_{2n} + 2na_{2n}$$

donc par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n+1)\, a_{2n+1} = 0$.

Ainsi les deux suites extraites des termes d'indices pairs et des termes d'indices impairs de la suite (na_n) convergent vers la même limite (nulle) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$.

4d Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ converge.

Par la question prélimaire,on a $B_n = A_{n+1} - (n+1)\, a_{n+1}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)\, a_{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} B_n = \lim\limits_{n\to+\infty} A_{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$. Donc la série $\sum b_n$ converge

4e A-t-on $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$?

et on obtient $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$.

5 On suppose dans cette question uniquement que la série $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et de limite nulle.

5a Vérifier que pour tous entiers m, n tels que $1 \leq m \leq n$, on a $B_n \geq A_m - ma_{n+1}$.

Par la question préliminaire, $B_n = A_{n+1} - (n+1)\, a_{n+1}$ donc :

$$B_n = A_m + \sum_{k=m+1}^{n+1} a_k - (n+1)\, a_{n+1}.$$

Or pour $k \in [|m+1, n+1|]$, $a_k \geq a_{n+1}$ car (a_n) est décroissante. Donc par sommation, $\sum\limits_{k=m+1}^{n+1} a_k \geq \sum\limits_{k=m+1}^{n+1} a_{n+1} = (n-m+1)\, a_{n+1}$.

Donc :

$$B_n \geq A_m + (n-m+1-n-1)\, a_{n+1} = A_m - ma_{n+1}.$$

5b En déduire que $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ converge.

On a $ma_{n+1} \geq 0$, donc $A_m \leq B_n \leq \sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k$ car la série $\sum b_n$ est à termes positifs car $b_n = n\left(a_n - a_{n+1}\right) \geq 0$ car (a_n) est décroissante. Donc la suite (A_m) est majorée. Or la série $\sum a_n$ est à termes positifs donc cette série est convergente.

5c Peut-on en déduire que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$?

On peut alors appliquer le 4 et on obtient $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Corrigé exercice 3 : Etude d'un dépassement de seuil.

On dispose d'une urne contenant deux boules, l'une numérotée 1 l'autre numérotée 2. On effectue dans cette urne une succession de tirages au hasard d'une boule, en notant le numéro obtenu, la boule tirée étant remise dans l'urne après chaque tirage.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro tiré au rang n. On a donc $P\left(X_n = 1\right) = P\left(X_n = 2\right) = \dfrac{1}{2}$. De plus, les variables $\left(X_1, \ldots, X_n\right)$ sont mutuellement indépendantes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, S_n désigne donc la somme des numéros obtenus après n tirages.

Pour $N \in \mathbb{N}^*$ donné, on considère la variable aléatoire T_N égale au rang n où pour la première fois, on a $S_n > N$.

Par exemple, si $N = 5$ et si les premiers numéros tirés sont $2, 1, 2, 1, 1, \ldots$, alors $T_5 = 4$.

De même si $N = 5$ et les premiers numéros tirés sont $2, 2, 2, 1, 2, \ldots$, alors $T_5 = 3$.

1 Préliminaires :

1a On considère la suite réelle $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $v_1 = \dfrac{5}{6}$, $v_2 = \dfrac{11}{12}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_{n+2} = \frac{1}{2}\left(v_{n+1} + v_n\right).$$

Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \lambda + \mu\alpha^n$ pour des constantes λ, μ et α que l'on déterminera.

On reconnaît une suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants. L'équation caractéristique est $r^2 - \dfrac{1}{2}r - \dfrac{1}{2} = 0$ de discriminant $\Delta = \dfrac{1}{4} + 2 = \dfrac{9}{4}$ et de racines $r_1 = \dfrac{1/2 + 3/2}{2} = 1$ et $r_2 = \dfrac{1/2 - 3/2}{2} = -\dfrac{1}{2}$ donc il existe des réels λ et μ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \lambda + \mu\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Les cas $n = 1$ et $n = 2$ donnent : $\begin{cases} \lambda - \dfrac{1}{2}\mu = \dfrac{5}{6} \\ \lambda + \dfrac{1}{4}\mu = \dfrac{11}{12} \end{cases}$ d'où $\begin{cases} \lambda = \dfrac{8}{9} \\ \mu = \dfrac{4}{3}.\dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{9} \end{cases}$ d'où :

$$v_n = \frac{8}{9} + \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

1b On considère la suite réelle $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $w_1 = \frac{3}{2}$, $w_2 = \frac{9}{4}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$w_{n+2} = \frac{1}{2}\left(w_{n+1} + w_n\right) + 1.$$

En considérant la suite $v_n = w_n - \frac{2n}{3}$, se ramener à la question précédente et en déduire la valeur de w_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
On a :

- $v_1 = w_1 - \frac{2}{3} = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$
- $v_2 = w_2 = \frac{4}{3} = \frac{9}{4} - \frac{4}{3} = \frac{11}{12}$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(v_{n+1} + v_n\right) &= \frac{1}{2}\left(w_{n+1} - \frac{2\left(n+1\right)}{3} + w_n - \frac{2n}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(w_{n+1} + w_n\right) - \frac{2n}{3} - \frac{1}{3} \\
&= w_{n+2} - 1 - \frac{2n}{3} - \frac{1}{3} = w_{n+2} - \frac{2n}{3} - \frac{4}{3} = w_{n+2} - \frac{2\left(n+2\right)}{3} \\
&= v_{n+2}
\end{aligned}$$

donc la suite (v_n) ainsi définie vérifie toutes les conditions de celle de la question précédente donc $v_n = \frac{8}{9} + \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ donc :

$$w_n = \frac{8}{9} + \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2n}{3}$$

2 Exemples :

2a Déterminer les lois de T_1 et T_2 ainsi que leurs espérances et variances.
On a clairement $T_1(\Omega) = \{1, 2\}$ et $(T_1 = 1) = (X_1 = 2)$ et $(T_1 = 2) = (X_1 = 1)$ donc $P(T_1 = 1) = \frac{1}{2}$ et $P(T_1 = 2) = \frac{1}{2}$.
Puis $T_2(\Omega) = \{2, 3\}$ et $(T_2 = 3) = (X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)$ donc par indépendance de X_1 et X_2 :

$$P(T_2 = 3) = P(X_1 = 1)\, P(X_2 = 1) = \frac{1}{4}$$

Donc :

$$P(T_2 = 2) = 1 - P(T_2 = 3) = \frac{3}{4}$$

D'où en utilisant théorème de transfert et formule de Huygens :

$$\begin{aligned}
E(T_1) &= \frac{1}{2}+2.\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\\
E\left(T_1^2\right) &= \frac{1}{2}+2^2.\frac{1}{2}=\frac{5}{2}\\
V(T_1) &= E\left(T_1^2\right)-\left(E(T_1)\right)^2=\frac{5}{2}-\frac{9}{4}=\frac{1}{4}\\
E(T_2) &= 3.\frac{1}{4}+2.\frac{3}{4}=\frac{9}{4}\\
E\left(T_2^2\right) &= 3^2.\frac{1}{4}+2^2.\frac{3}{4}=\frac{21}{4}\\
V(T_2) &= E\left(T_2^2\right)-\left(E(T_2)\right)^2=\frac{21}{4}-\left(\frac{9}{4}\right)^2=\frac{3}{16}
\end{aligned}$$

2b Déterminer $T_5(\Omega)$.

Les cas critiques à considérer sont de ne tirer que des 2 auquel cas $T_5=3$ et de ne tirer que des 1 auquel cas $T_5=6$. Les valeurs intermédiaires de T_5 (4 et 5) sont bien sûr possibles. Donc $T_5(\Omega)=[|3,6|]$.

2c Sans justifier vos calculs, dresser dans un tableau les probabilités $P(T_5=i,X_1=j)$ pour $i\in[|3,6|]$ et $j\in\{1,2\}$.

$T_5 \diagdown X_1$	1	2	$P(T_5=x)$
3	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{9}{16}$
5	$\frac{7}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{9}{32}$
6	$\frac{1}{32}$	0	$\frac{1}{32}$

2d Déterminer la loi de T_5.

Elle s'obtient par sommations des lignes dans le tableau ci-dessus (dernière colonne).

3 Calcul de l'espérance de T_N : on revient au cas général où $N\in\mathbb{N}$ avec $N\geq 2$.

3a Déterminer la plus petite et la plus grande valeur de T_N dans le cas où N est pair. Même question dans le cas où N est impair.

En considérant comme en $2b$ les cas critiques (que des 1 ou que des 2), on obtient :

- si N est pair, $T_N(\Omega)=\left[\left|\frac{N}{2}+1,N+1\right|\right]$
- si N est impair, $T_N(\Omega)=\left[\left|\frac{N-1}{2}+1,N+1\right|\right]$.

3b Soit $k\in\mathbb{N}$ tel que $k\geq 3$. On rappelle que $S_k=\sum\limits_{n=1}^{k}X_n$. On pose aussi $S'_k=\sum\limits_{n=2}^{k}X_n$.

On admettra que le couple $\left(S'_{k-1},S'_k\right)$ a même loi (conjointe) que le couple (S_{k-2},S_{k-1}).

Justifier que $(X_1=2)\cap(T_{N+2}=k)=(X_1=2)\cap(S'_k>N)\cap\left(S'_{k-1}\le N\right)$.
On a $(T_{N+2}=k)=(S_k>N+2)\cap(S_{k-1}\le N+2)$ donc :

$$\begin{aligned}(X_1=2)\cap(T_{N+2}=k) &= (X_1=2)\cap(S_k>N+2)\cap(S_{k-1}\le N+2)\\ &= (X_1=2)\cap(S_k-2>N)\cap(S_{k-1}-2\le N)\\ &= (X_1=2)\cap(S'_k>N)\cap\left(S'_{k-1}\le N\right)\end{aligned}$$

En déduire que $P\left((X_1=2)\cap(T_{N+2}=k)\right)=\frac{1}{2}P\left(T_N=k-1\right)$.
On a donc :

$$\begin{aligned}P\left((X_1=2)\cap(T_{N+2}=k)\right) &= P\left((X_1=2)\cap(S'_k>N)\cap\left(S'_{k-1}\le N\right)\right)\\ &= P\left((X_1=2)\right)P\left((S'_k>N)\cap\left(S'_{k-1}\le N\right)\right)\end{aligned}$$

car X_1 est indépendant de S'_k et S'_{k-1}.
De plus le couple $\left(S'_{k-1},S'_k\right)$ a même loi (conjointe) que le couple (S_{k-2},S_{k-1}) donc :

$$\begin{aligned}P\left((X_1=2)\cap(T_{N+2}=k)\right) &= \frac{1}{2}P\left((S_{k-1}>N)\cap(S_{k-2}\le N)\right)\\ &= \frac{1}{2}P\left(T_N=k-1\right)\end{aligned}$$

Conclure que $P\left(T_{N+2}=k\right)=\frac{1}{2}P\left(T_{N+1}=k-1\right)+\frac{1}{2}P\left(T_N=k-1\right)$.
Par la formule des probabilités totales avec le SCE $\left((X_1=1),(X_1=2)\right)$, on a :

$$P\left(T_{N+2}=k\right)=P\left(X_1=1\right)\cap(T_{N+2}=k)+P\left(X_1=2\right)\cap(T_{N+2}=k)$$

Or de même que plus haut, $(X_1=1)\cap(T_{N+2}=k)=(X_1=1)\cap(S'_k>N+1)\cap\left(S'_{k-1}\le N+1\right)$ et par les mêmes arguments que plus haut :

$$\begin{aligned}P\left((X_1=1)\cap(T_{N+2}=k)\right) &= P\left(X_1=1\right)P\left((S'_k>N+1)\cap\left(S'_{k-1}\le N+1\right)\right)\\ &= P\left(X_1=1\right)P\left((S_{k-1}>N+1)\cap(S_{k-2}\le N+1)\right)\\ &= \frac{1}{2}P\left(T_{N+1}=k-1\right)\end{aligned}$$

donc :

$$P\left(T_{N+2}=k\right)=\frac{1}{2}P\left(T_{N+1}=k-1\right)+\frac{1}{2}P\left(T_N=k-1\right)$$

Vérifier que cette formule est encore valable si $k=1$ ou $k=2$.
C'est vrai pour $k=1$ et pour $k=2$ car $0=\frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{2}\times 0$ et que les événements $(T_{N+2}=2)$, $(T_{N+1}=1)$ et $(T_N=1)$ sont impossibles.

Preuve du résultat admis dans l'énoncé : $X_1,\dots,X_n$ sont mutuellement indépendantes et de même loi donc les $(n-1)$-uplets $(X_1,\dots,X_{n-1})$ et $(X_2,\dots,X_n)$ ont même loi conjointe. D'après le lemme des coalitions, (S_{k-2},S_{k-1}) a donc même loi que $\left(S'_{k-1},S'_k\right)$.

3c Justifier les égalités suivantes en prêtant attention aux bornes des sommes :

$$E(T_{N+2}) = \sum_{k=1}^{N+3} kP(T_{N+2} = k) \text{ et } E(T_N) = \sum_{k=1}^{N+2} kP(T_N = k)$$

On a $T_N(\Omega) \subset [|1, N+1|]$ et bien sûr $P(T_N = k) = 0$ si $k \notin T_N(\Omega)$ donc $E(T_N) = \sum_{k=1}^{N+1} kP(T_N = k) = \sum_{k=1}^{N+2} kP(T_N = k)$.

De même $E(T_{N+2}) = \sum_{k=1}^{N+3} kP(T_{N+2} = k)$.

En déduire l'égalité : $E(T_{N+2}) = \frac{1}{2}(E(T_{N+1}) + E(T_N)) + 1$.Donc on a en utilisant $3b$:

$$\begin{aligned} E(T_{N+2}) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N+3} k(P(T_{N+1} = k-1) + P(T_N = k-1)) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N+2}(k+1)P(T_{N+1} = k) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N+2}(k+1)P(T_N = k) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N+2} kP(T_{N+1} = k) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N+2} kP(T_N = k) + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{N+2} P(T_{N+1} = k) + \sum_{k=0}^{N+2} P(T_N = k)\right) \\ &= \frac{1}{2}(E(T_{N+1}) + E(T_N)) + 1 \end{aligned}$$

3d A l'aide du préliminaire, prouver que $E(T_N) = \frac{6N+8}{9} + \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^N$.

$E(T_1) = \frac{3}{2}$ et $E(T_2) = \frac{9}{4}$ donc d'après la question préliminaire, on a :

$$E(T_N) = \frac{8}{9} + \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^N + \frac{2N}{3} = \frac{6N+8}{9} + \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^N$$

Quelle est la limite de la suite de terme général $\frac{E(T_N)}{N}$? Ce résultat est-il plausible (expliquez !) ?

Par croissance comparée, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^N}{N} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{E(T_N)}{N} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

Ceci était prévisible car avec quiprobabilité 1 ou 2 à chaque tirage, on a $S_n \approx 2\frac{N}{2} + \frac{N}{2} = \frac{3N}{2}$ donc $S_n \gtrsim N$ pour $n \gtrsim \frac{2N}{3}$.

Corrigé de l'exercice 4 : n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. E est un espace euclidien de dimension n dont on note le produit scalaire $(.\mid.)$ et la norme associée $\|.\|$.

On suppose que $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots \overrightarrow{e_n})$ est une base orthonormée de E.

On considère l'endomorphisme f de E tel que pour tout $i = 1, \ldots, n$, $f(\overrightarrow{e_i}) = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \cdots + \overrightarrow{e_n}$.

Etant donnés n réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$, on note $m = \min(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et on suppose que $m > n$.

On note d l'endomorphisme de E tel que pour tout $i = 1, \ldots, n$, $d(\overrightarrow{e_i}) = a_i\overrightarrow{e_i}$.

On note enfin g l'endomorphisme de E défini par $g = f + d$.

1 Représenter les matrices de f et d dans la base $\mathcal{B}$.

On a $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(d) = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$.

2a On note $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \cdots + \overrightarrow{e_n}$, exprimer $f(\overrightarrow{w})$ en fonction de $\overrightarrow{w}$.

$f(\overrightarrow{w}) = f(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \cdots + \overrightarrow{e_n}) = f(\overrightarrow{e_1}) + f(\overrightarrow{e_2}) + \cdots + f(\overrightarrow{e_n}) = nf(\overrightarrow{e_1}) = n\overrightarrow{w}$.

2b Déterminer $\operatorname{Im}(f)$ et en préciser une base orthonormée.

$\operatorname{Im}(f) = Vect(f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), \ldots, f(\overrightarrow{e_n})) = Vect(f(\overrightarrow{e_1})) = Vect(\overrightarrow{w})$ donc $\dfrac{\overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{w}\|} = \dfrac{\overrightarrow{w}}{\sqrt{n}}$ est une base orthonormée de $\operatorname{Im}(f)$.

2c Prouver que $\ker(f)$ est le sous-espace vectoriel de E de base $(\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_1}, \ldots \overrightarrow{e_n} - \overrightarrow{e_1})$.

On a: $f(\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_1}) = f(\overrightarrow{e_2}) - f(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{0}$ donc $\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_1} \in \ker(f)$.

De même, on vérifie que $\overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n} - \overrightarrow{e_1} \in \ker(f)$.

De plus, $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_1}, \ldots \overrightarrow{e_n} - \overrightarrow{e_1}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice échelonnée (à l'envers par rapport au cours) donc la famille de vecteurs $(\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n} - \overrightarrow{e_1})$ est une famille libre. Or elle de cardinal $n-1$, qui est aussi d'après la formule du rang, la dimension de $\ker(f)$.

Donc c'est une base de $\ker(f)$.

2d En déduire que $\operatorname{Im}(f) = (\ker(f))^{\perp}$.

On a: $(\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_1} \mid \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_1} \mid \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \cdots + \overrightarrow{e_n}) = 1 - 1$ (la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots \overrightarrow{e_n})$ est orthonormée).

Donc $\overrightarrow{w} \in \{\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n} - \overrightarrow{e_1}\}^{\perp} = (Vect(\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n} - \overrightarrow{e_1}))^{\perp} = (\ker(f))^{\perp}$.

Or $\operatorname{Im}(f) = Vect(\overrightarrow{w})$ donc $\operatorname{Im}(f) \subset (\ker(f))^{\perp}$. Enfin, $\dim(\operatorname{Im}(f)) = n - \dim(\ker(f)) = \dim\left((\ker(f))^{\perp}\right)$ (car E est euclidien) donc $\operatorname{Im}(f) = (\ker(f))^{\perp}$.

2e Expliquer alors comment obtenir une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

(on ne demande pas d'expliciter les vecteurs de la base $\mathcal{B}'$).

On choisit une base orthonormée de $\ker(f)$, que l'on complète par $\dfrac{\overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{w}\|}$, qui est unitaire et orthogonal à tous les vecteurs de $\ker(f)$.

On obtient ainsi une BON $\mathcal{B}'$ de E et on a bien $f\left(\dfrac{\overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{w}\|}\right) = \dfrac{f(\overrightarrow{w})}{\|\overrightarrow{w}\|} = n\dfrac{\overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{w}\|}$ donc

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

2f En déduire que pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, $\|f(\overrightarrow{u})\| \leq n\|\overrightarrow{u}\|$.

Soit $\overrightarrow{u} \in E$, de coordonnées dans $\mathcal{B}'$ $(u_1, \ldots, u_n)$.

Comme $\begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nu_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, on a $\|f(\overrightarrow{u})\| = n\sqrt{u_1^2} \leq n\sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2} = n\|\overrightarrow{u}\|$.

3a Justifier que d est un automorphisme de E.

La matrice de d dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale à éléments diagonaux tous non nuls (car tous les a_i sont supérieurs ou égaux à m et $m > n$), donc cette matrice est inversible donc d est un automorphisme de E.

3b Montrer que pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, $\|d(\overrightarrow{u})\| \geq m\|\overrightarrow{u}\|$ et que pour tout $\overrightarrow{v} \in E$, $\|d^{-1}(\overrightarrow{v})\| \leq \dfrac{1}{m}\|\overrightarrow{v}\|$.

De plus, si $\overrightarrow{u} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}$, $\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x_1 \\ \vdots \\ a_nx_n \end{pmatrix}$, on a :

$$\|d(\overrightarrow{u})\| = \sqrt{a_1^2x_1^2 + \cdots + a_n^2x_n^2} \geq \sqrt{m^2(x_1^2 + \cdots + x_n^2)} = m\|\overrightarrow{u}\|$$

et pour tout $\overrightarrow{v} \in E$, avec $\overrightarrow{u} = d^{-1}(\overrightarrow{v})$, $\|d(\overrightarrow{u})\| \geq m\|\overrightarrow{u}\|$ s'écrit $\|\overrightarrow{v}\| \geq m\|d^{-1}(\overrightarrow{v})\|$ d'où $\|d^{-1}(\overrightarrow{v})\| \leq \dfrac{1}{m}\|\overrightarrow{v}\|$.

3c Vérifier que pour tout vecteur non nul $\overrightarrow{u} \in E$, $\|f(\overrightarrow{u})\| < \|d(\overrightarrow{u})\|$.

Ainsi pour tout vecteur non nul $\overrightarrow{u} \in E$, $\|f(\overrightarrow{u})\| = n\|\overrightarrow{u}\| < m\|\overrightarrow{u}\| \leq \|d(\overrightarrow{u})\|$.

3d En déduire en étudiant $\ker(g)$ que g est un automorphisme de E.

Soit $\overrightarrow{u} \in \ker(g)$, alors $g(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0} = f(\overrightarrow{u}) + d(\overrightarrow{u})$ donc $f(\overrightarrow{u}) = -d(\overrightarrow{u})$ et $\|f(\overrightarrow{u})\| = \|d(\overrightarrow{u})\|$, ce qui n'est possible d'après ci-dessus que pour $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$. Ainsi, $\ker(g) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ et g est injective. Comme g est un endomorphisme en dimension finie, il en résulte que g est un automorphisme de E.

4 Soit un vecteur $\overrightarrow{v}$ fixé de E. Il existe d'après le 2.d un unique vecteur $\overrightarrow{u}$ de E tel que $g(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$.

4a Vérifier que $\overrightarrow{u} = d^{-1}(\overrightarrow{v}) - (d^{-1} \circ f)(\overrightarrow{u})$.

On a : $g(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v} = (f + d)(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{u}) + d(\overrightarrow{u})$ donc $d^{-1}(\overrightarrow{v}) = d^{-1}(f(\overrightarrow{u}) + d(\overrightarrow{u})) = d^{-1}(f(\overrightarrow{u})) + \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u} = d^{-1}(\overrightarrow{v}) - (d^{-1} \circ f)(\overrightarrow{u})$.

On considère alors la suite $(\overrightarrow{u_k})_{k\in\mathbf{N}}$ de vecteurs de E définie par : $\begin{cases} \overrightarrow{u_0} = \overrightarrow{v} \\ \forall k \in \mathbf{N},\ \overrightarrow{u_{k+1}} = d^{-1}(\overrightarrow{v}) - (d^{-1} \circ f)(\overrightarrow{u_k}) \end{cases}$

4b Montrer que pour tout entier naturel k, $\overrightarrow{u_{k+1}} - \overrightarrow{u} = -\left(d^{-1} \circ f\right)\left(\overrightarrow{u_k} - \overrightarrow{u}\right)$.

Pour tout entier naturel k :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u_{k+1}} - \overrightarrow{u} &= d^{-1}\left(\overrightarrow{v}\right) - \left(d^{-1} \circ f\right)\left(\overrightarrow{u_k}\right) - \left(d^{-1}\left(\overrightarrow{v}\right) - \left(d^{-1} \circ f\right)\left(\overrightarrow{u}\right)\right) \\ &= -\left(d^{-1} \circ f\right)\left(\overrightarrow{u_k}\right) - \left(d^{-1} \circ f\right)\left(-\overrightarrow{u}\right) = -\left(d^{-1} \circ f\right)\left(\overrightarrow{u_k} - \overrightarrow{u}\right) \end{aligned}$$

par linéarité.

4c En déduire que pour tout entier naturel k, $\|\overrightarrow{u_{k+1}} - \overrightarrow{u}\| \leq \dfrac{n}{m}\|\overrightarrow{u_k} - \overrightarrow{u}\|$.

Montrer enfin que $\lim\limits_{k \to +\infty} \|\overrightarrow{u_k} - \overrightarrow{u}\| = 0$.

Donc pour tout entier naturel k, $\|\overrightarrow{u_{k+1}} - \overrightarrow{u}\| = \|\left(d^{-1} \circ f\right)\left(\overrightarrow{u_k} - \overrightarrow{u}\right)\| \leq \dfrac{1}{m}\|f\left(\left(\overrightarrow{u_k} - \overrightarrow{u}\right)\right)\| \leq \dfrac{n}{m}\|\overrightarrow{u_k} - \overrightarrow{u}\|$.

Par récurrence, il vient facilement $\|\overrightarrow{u_k} - \overrightarrow{u}\| \leq \left(\dfrac{n}{m}\right)^k \|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}\|$.

Comme $0 < \dfrac{n}{m} < 1$, on a $\lim\limits_{k \to +\infty} \left(\dfrac{n}{m}\right)^k \|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}\| = 0$ donc par encadrement, $\lim\limits_{k \to +\infty} \|\overrightarrow{u_k} - \overrightarrow{u}\| = 0$.