D.S.9

Exercice 1 : Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On pose pour tout $(P, Q) \in E^2$:

$$(P \mid Q) = P(1) Q(1) + \int_0^1 P'(t) Q'(t) \, dt$$

1 Montrer que ceci définit un produit scalaire sur E.

2 A l'aide du procédé de Schimdt, construire une base orthonormale (R_0, R_1) de $\mathbb{R}_1[X]$ à partir de la base canonique $(1, X)$.

3 On note f le projecteur orthogonal sur $\mathbb{R}_1[X]$. Déterminer $f(X^2)$.

4 En déduire la distance de X^2 au sous-espace $\mathbb{R}_1[X]$.

Exercice 2 : Des bits d'information, c'est-à dire des 1 ou 0 sont transmis par l'intermédiaire d'un canal. Ce canal n'est pas complètement fiable. On observe qu'un bit envoyé, un 1 ou un 0, peut être altéré en sortie, c'est-à dire qu'un 1 (respectivement un 0) en entrée du canal peut devenir un 0 (respectivement un 1) en sortie.
On note b le bit envoyé et b' le bit en sortie $(b, b' \in \{0, 1\})$:

$$b \rightarrow \text{canal bruité} \rightarrow b'$$

Après observation, on modélise la transmission d'un bit de façon probabiliste :

- Le bit envoyé définit une variable aléatoire b : on note α la probabilité qu'un 1 soit envoyé (c'est-à dire $\alpha = P(b = 1)$ et donc $1 - \alpha$ la probabilité qu'un 0 soit envoyé.
- La perturbation dans le canal est aussi modélisée de façon probabiliste :
  - On désigne par p la probabilité qu'un 1 en entrée ne soit pas altéré pendant la transmission (c'est-à dire $p = P(b' = 1 \mid b = 1)$ et donc $1 - p$ désigne la probabilité qu'un 1 en entrée devienne un 0 en sortie.
  - On désigne par q la probabilité qu'un 0 en entrée ne soit pas altéré pendant la transmission et donc $1 - q$ désigne la probabilité qu'un 0 en entrée devienne un 1 en sortie.

1 On a écrit ci-dessus $p = P(b' = 1 \mid b = 1)$. Exprimer de la même manière $1 - p, q$ et $1 - q$ en termes de probabilités conditionnelles.

2 Un bit est envoyé. Quelle est la probabilité de recevoir un 1 en sortie?

3 On reçoit le bit 1. Quelle est alors la probabilité qu'un 1 ait été envoyé en entrée?

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On décide d'envoyer n fois le même bit $b.On$ note $b'_1, \ldots b'_n$ les n bits obtenus en sortie et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de 1 en sortie :

$$b \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{canal bruité} \rightarrow b'_1 \\ \text{canal bruité} \rightarrow b'_2 \\ \qquad \vdots \\ \text{canal bruité} \rightarrow b'_n \end{array} \right.$$

4 Soit k un entier entre 0 et n. Exprimer $P(X = k)$ en fonction des paramètres p, q, α.

5 En déduire l'espérance de X en fonction de p, q, α.

6 Soit k un entier entre 0 et n. Exprimer la probabilité que le bit 1 ait été envoyé sachant que le nombre de 1 en sortie vaut k.

7 On fait à présent l'hypothèse que le canal est symétrique, c'est-à dire que $p = q$. De plus, on suppose que $p > \frac{1}{2}$.

7a Déterminer en fonction des paramètres p et α, l'ensemble des valeurs k prises par X pourlesquelles il est plus probable (au sens strict) qu'un 1 ait été envoyé plutôt qu'un 0?

7b Que devient ce résultat lorsque $\alpha = \frac{1}{2}$?

8 On suppose $\alpha = \frac{1}{2}$. On note $f(n)$ la probabilité que l'interprétation de l'observation en sortie soit fausse, c'est-à dire que le bit en entrée n'est pas celui le plus probable en sortie.

8a Exprimer $f(n)$ en fonction des $P(X = k)$, pour des entiers k entre 0 et n.

8b Donner une expression de $f(n)$ en fonction de n et p.

8c Ecrire une fonction `binome` en langage Python qui prend en entrée un entier naturel N et un entier naturel k compris entre 0 et N et retourne la valeur du coefficient binomial $\binom{N}{k}$.

8d On suppose $p = 0.95$. Ecrire un programme en langage Python qui prend en entrée l'entier naturel n et donne une estimation de $f(n)$.

Corrigé exercice 1 :

1 On a écrit ci-dessus $p = P(b' = 1 \mid b = 1)$. Exprimer de la même manière $1-p, q$ et $1-q$ en termes de probabilités conditionnelles.

On a :

$$1 - p = P(b' = 0 \mid b = 1)\,; q = P(b' = 0 \mid b = 0)\,; 1 - q = P(b' = 1 \mid b = 0)$$

2 Un bit est envoyé. Quelle est la probabilité de recevoir un 1 en sortie?

$(b = 1)$ et $(b = 0)$ forment un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned} P(b' = 1) &= P(b = 1)\,P(b' = 1 \mid b = 1) + P(b = 0)\,P(b' = 1 \mid b = 0) \\ &= p\alpha + (1 - q)(1 - \alpha) \end{aligned}$$

3 On reçoit le bit 1. Quelle est alors la probabilité qu'un 1 ait été envoyé en entrée?

Selon la formule de Bayes : $P(b = 1 \mid b' = 1) = \dfrac{P(b' = 1 \mid b = 1)\,P(b = 1)}{P(b' = 1)}$ si $P(b' = 1) \neq 0$.
Si on avait $P(b' = 1) = 0$, on aurait $p\alpha = (1 - q)(1 - \alpha) = 0$. On est obligé de supposer $p > 0$ et $0 < \alpha < 1$ vu le contexte.
Sachant qu'on a reçu le bit 1, la probabilité qu'un 1 ait été envoyé est donc :

$$P(b = 1 \mid b' = 1) = \frac{p\alpha}{p\alpha + (1 - q)(1 - \alpha)}$$

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On décide d'envoyer n fois le même bit $b.On$ note $b'_1, \ldots b'_n$ les n bits obtenus en sortie et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de 1 en sortie :

$$b \to \begin{cases} \text{canal bruité} \to b'_1 \\ \text{canal bruité} \to b'_2 \\ \qquad\vdots \\ \text{canal bruité} \to b'_n \end{cases}$$

4 Soit k un entier entre 0 et n. Exprimer $P(X = k)$ en fonction des paramètres p, q, α.

Si un 1 est envoyé, les éventuelles perturbations sont *a priori* indépendantes les unes des autres. On note Y la variable aléatoire correspondant au nombre de 1 reçus de sorte que $P(X = k \mid b = 1) = P(Y = k)$
On répète n fois de façon indépendante la même expérience de Bernouilli dont les deux issues sont :

- 1 avec une probabilité p
- 0 avec une probabilité $1 - p$

Y compte le nombre de 1 donc Y suit une loi binômiale $\mathcal{B}(n,p)$: $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ donc pour $k \in [|0,n|]$:

$$P(Y=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

En notant Z tel que $P(X=k \mid b=0) = P(Z=k)$ on a de même $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1-q)$ donc pour $k \in [|0,n|]$:

$$P(Z=k) = \binom{n}{k} (1-q)^k q^{n-k}$$

La formule des probabilités totales donne alors $P(X=k) = P(Y=k)\,P(b=1) + P(Z=k)\,P(b=0)$ donc pour $k \in [|0,n|]$:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \left(\alpha p^k (1-p)^{n-k} + (1-\alpha)(1-q)^k q^{n-k}\right)$$

5 En déduire l'espérance de X en fonction de p, q, α.

On a :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = \alpha \sum_{k=0}^{n} kP(Y=k) + (1-\alpha)\sum_{k=0}^{n} kP(Z=k)$$

donc $E(X) = \alpha E(Y) + (1-\alpha)E(Z) = \alpha np + (1-\alpha)n(1-q)$ (Y et Z suivent de slois binômiales). Ainsi

$$E(X) = n(\alpha p + (1-\alpha)(1-q))$$

6 Soit k un entier entre 0 et n. Exprimer la probabilité que le bit 1 ait été envoyé sachant que le nombre de 1 en sortie vaut k.

Si le bit envoyé est 1 (c'est-à dire si $b=1$) et si Y désigne le nombre de bits 1 reçus, alors $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. On peut encore appliquer la formule de Bayes :

$$\begin{aligned}
P(b=1 \mid X=k) &= \frac{P(X=k \mid b=1)\,P(b=1)}{P(X=k)} = P(b=1)\frac{P(Y=k)}{P(X=k)} \\
&= \alpha \frac{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}{\binom{n}{k}\left(\alpha p^k (1-p)^{n-k} + (1-\alpha)(1-q)^k q^{n-k}\right)} \\
&= \alpha \frac{p^k (1-p)^{n-k}}{\alpha p^k (1-p)^{n-k} + (1-\alpha)(1-q)^k q^{n-k}}
\end{aligned}$$

7a Déterminer en fonction des paramètres p et α, l'ensemble des valeurs k prises par X pour-lesquelles il est plus probable (au sens strict) qu'un 1 ait été envoyé plutôt qu'un 0?

L'hypothèse que le canal est symétrique donne

$$P(b=1 \mid X=k) = \alpha \frac{p^k (1-p)^{n-k}}{\alpha p^k (1-p)^{n-k} + (1-\alpha)(1-p)^k p^{n-k}}$$

donc :

$$P(b=0 \mid X=k) = (1-\alpha)\frac{(1-p)^k p^{n-k}}{\alpha p^k (1-p)^{n-k} + (1-\alpha)(1-p)^k p^{n-k}}$$

donc :

$$\begin{aligned}
P(b=1 \mid X=k) &> P(b=0 \mid X=k) \Leftrightarrow \alpha p^k (1-p)^{n-k} > (1-\alpha)(1-p)^k p^{n-k} \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{p}{1-p}\right)^{2k} > \left(\frac{p}{1-p}\right)^n \frac{1-\alpha}{\alpha} \\
&\Leftrightarrow k > \frac{n(\ln(p)-\ln(1-p)) + \ln(1-\alpha) - \ln(\alpha)}{2(\ln(p)-\ln(1-p))}
\end{aligned}$$

car $p > \frac{1}{2}$ donc $\frac{p}{1-p} > 1$ donc $\ln(p) - \ln(1-p) > 0$.

7b Que devient ce résultat lorsque $\alpha = \frac{1}{2}$?

Si $\alpha = \frac{1}{2}$, le 1 est le plus probable si et seulement si $2k > n$

8 On suppose $\alpha = \frac{1}{2}$. On note $f(n)$ la probabilité que l'interprétation de l'observation en sortie soit fausse, c'est-à dire que le bit en entrée n'est pas celui le plus probable en sortie.

8a Exprimer $f(n)$ en fonction des $P(X=k)$, pour des entiers k entre 0 et n.

Les hypothèses $\alpha = \frac{1}{2}$ et $p = q$ donnent :

$$P(b=1 \mid X=k) = \frac{p^k (1-p)^{n-k}}{p^k (1-p)^{n-k} + (1-p)^k p^{n-k}}$$

donc

$$P(b=0 \mid X=k) = \frac{(1-p)^k p^{n-k}}{p^k (1-p)^{n-k} + (1-p)^k p^{n-k}}$$

et $P(X=k) = \frac{1}{2}\binom{n}{k}\left(p^k (1-p)^{n-k} + (1-p)^k p^{n-k}\right)$. La formule des probabilités totales donne :

$$f(n) = \sum_{n/2<k\leq n} P(b=0 \mid X=k)\, P(X=k) + \sum_{0\leq k<n/2} P(b=1 \mid X=k)\, P(X=k)$$

8b Donner une expression de $f(n)$ en fonction de n et p.

Donc :

$$f(n) = \frac{1}{2}\sum_{n/2<k\leq n} \binom{n}{k} (1-p)^k p^{n-k} + \frac{1}{2}\sum_{0\leq k<n/2} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

8c Ecrire une fonction binome en langage Python qui prend en entrée un entier naturel N et un entier naturel k compris entre 0 et N et retourne la valeur du coefficient binomial $\binom{N}{k}$.

```
def TPascal(n):
    L=[1]
    for k in range(1,n):
        aux=[1]
        for j in range(1,k):
            aux.append(L[j-1]+L[j])
        aux.append(1)
        L=aux
    return L
def binome(n,k):
    if k>n:
        return 0
    else:
        return TPascal[k]
```

8d On suppose $p = 0.95$. Ecrire un programme en langage Python qui prend en entrée l'entier naturel n et donne une estimation de $f(n)$.

```
p=0.95
def f(n):
    somme=0
    coefs=TPascal(n)
    for k in range(n+1):
        if 2*k>n:
            somme+=coefs[k]*((1-p)**k)*(p**(n-k))
        if 2*k<n:
            somme+=coefs[k]*(p**k)*((1-p)**(n-k))
    return somme/2
\pagebreak
```

Corrigé de l'exercice 1 : Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On pose pour tout $(P, Q) \in E^2$:

$$(P \mid Q) = P(1)Q(1) + \int_0^1 P'(t)Q'(t)\,dt$$

1 Montrer que ceci définit un produit scalaire sur E.

- Soient $P_1, P_2, Q \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}(\lambda P_1 + \mu P_2 \mid Q) &= (\lambda P_1 + \mu P_2)(1)Q(1) + \int_0^1 (\lambda P_1 + \mu P_2)'(t)Q'(t)\,dt \\ &= \lambda P_1(1)Q(1) + \mu P_2(1)Q(1) + \lambda \int_0^1 P_1'(t)Q'(t)\,dt + \mu \int_0^1 P_2'(t)Q'(t)\,dt \\ &= \lambda(P_1 \mid Q) + \mu(P_2 \mid Q)\end{aligned}$$

donc $(. \mid .)$ est linéaire à gauche.

- $(P \mid Q) = P(1)Q(1) + \int_0^1 P'(t)Q'(t)\,dt = (Q \mid P)$ donc $(. \mid .)$ est symétrique donc aussi linéaire à droite donc bilinéaire.
- Soient $P \in E$, alors $(P \mid P) = (P(1))^2 + \int_0^1 (P'(t))^2\,dt \geq 0$ par positivité de l'intégrale.
Supposons $(P \mid P) = 0$, alors $(P(1))^2 + \int_0^1 (P'(t))^2\,dt = 0$ donc $P(1) = 0$ et $\int_0^1 (P'(t))^2\,dt = 0$.
Ainsi, $(P')^2$ est une fonction positive, continue et d'intégrale nulle sur $[0,1]$ donc d'après le théorème de l'intégrale nulle, P' est nulle sur $[0,1]$.
Donc P est constante sur $[0,1]$ donc nulle sur $[0,1]$ car $P(1) = 0$ et enfin $P = 0_E$ car P admet une infinité de racines.
- Donc $(. \mid .)$ est une forme bilinéire symétrique définie positive sur E, i.e., un produit scalaire sur E.

2 A l'aide du procédé de Schimdt, construire une base orthonormale (R_0, R_1) de $\mathbb{R}_1[X]$ à partir de la base canonique $(1, X)$.
Calculons :

$$(1 \mid 1) = 1 + \int_0^1 0dt = 1$$

donc on pose $R_0 = 1$.
Posons alors $U_1 = X + \lambda R_0$. Alors :

$$\begin{aligned} (R_0 \mid U_1) &= 0 \Leftrightarrow (R_0 \mid X) + \lambda (R_0 \mid R_0) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -(1 \mid X) \\ &\Leftrightarrow \lambda = -\left(1 + \int_0^1 0dt\right) = -1 \end{aligned}$$

donc on choisit $\lambda = -1$ et $U_1 = X - 1$ puis on calcule :

$$(U_1 \mid U_1) = (X - 1 \mid X - 1) = 0 + \int_0^1 dt = 1$$

donc avec $R_1 = X - 1$, d'après le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, (R_0, R_1) est une BON de $\mathbb{R}_1[X]$.

3 On note f le projecteur orthogonal sur $\mathbb{R}_1[X]$. Déterminer $f(X^2)$.
On a donc :

$$f\left(X^2\right) = \left(X^2 \mid R_0\right) R_0 + \left(X^2 \mid R_1\right) R_1 = \left(X^2 \mid 1\right) + \left(X^2 \mid X - 1\right)(X - 1)$$

Or :

$$\begin{aligned} \left(X^2 \mid 1\right) &= 1 + \int_0^1 0dt = 1 \\ \left(X^2 \mid X - 1\right) &= 0 + \int_0^1 2tdt = \left[t^2\right]_0^1 = 1 \end{aligned}$$

donc

$$f\left(X^2\right) = 1 + X - 1 = X$$

4 En déduire la distance de X^2 au sous-espace $\mathbb{R}_1[X]$.

Enfin :

$$\begin{aligned} d\left(X^2, \mathbb{R}_1[X]\right) &= \left\|X^2 - f\left(X^2\right)\right\| = \left\|X^2 - X\right\| \\ &= \sqrt{\left(0 + \int_0^1 (2t-1)^2\, dt\right)} = \sqrt{\int_0^1 \left(4t^2 - 4t + 1\right) dt} \\ &= \sqrt{\left[\frac{4}{3}t^3 - 2t^2 + t\right]_0^1} = \sqrt{\frac{4}{3} - 1} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$