

Colle n°2

Semaine du 22/09/2025

Ce que le programme contient :

APPLICATIONS ENTRE ENSEMBLES

- ★ Injectivité, surjectivité d'une application entre deux ensembles. Caractérisation à l'aide de quantificateurs.
- ★ Définition et caractérisation de l'application réciproque d'une application bijective.
- ★ Image directe, image réciproque d'un ensemble par une fonction.

SOMMES, PRODUITS - PREMIÈRES MANIPULATIONS

- ★ Notation \sum et propriétés : linéarité, relation de Chasles, changements d'indice (de type glissement ou retournement), somme télescopique, séparation des termes de rangs pairs et impairs.
- ★ Positivité de \sum . Inégalité triangulaire.
- ★ Sommes usuelles : pour $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- ★ Notation \prod et exemples d'utilisations, factorielle. Propriétés des produits finis vues par analogie de celles des sommes (produit télescopique, Chasles, factorisation...)

Ce que le programme ne contient pas :

- ★ des sommes doubles,
- ★ des exercices avancés sur les nombres complexes (les aspects géométriques seront bientôt approfondis),
- ★ des exercices utilisant les coefficients binomiaux,
- ★ du dénombrement.

Questions de cours possibles.

- ★ Linéariser $\sin^5(x)$ pour x réel.
- ★ Somme des n premiers entiers, démonstration par retournement.
- ★ Somme géométrique avec démonstration.
- ★ Factorisations de $a^n - b^n$ et $a^n + b^n$ (si possible...), avec démonstration.
- ★ Coefficients binomiaux : expression avec les factorielles et démonstration de la formule de Pascal.
- ★ Formule du binôme de Newton avec démonstration (récurrence).
- ★ Montrer que la composée de deux fonctions injectives est injective. Énoncer la réciproque partielle.
- ★ Montrer que la composée de deux fonctions surjectives est surjective. Énoncer la réciproque partielle.