

## Colle n°3

Semaine du 29/09/2025

### Ce que le programme contient :

SOMMES, PRODUITS, COEFFICIENTS BINOMIAUX

- ★ Notation  $\sum$  et propriétés : linéarité, relation de Chasles, changements d'indice (de type glissement ou retournement), somme télescopique, séparation des termes de rangs pairs et impairs.
- ★ Positivité de  $\sum$ . Inégalité triangulaire.
- ★ Sommes usuelles : pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- ★ Notation  $\prod$  et exemples d'utilisations, factorielle. Propriétés des produits finis vues par analogie de celles des sommes (produit télescopique, Chasles, factorisation...)
- ★ Expression, interprétations et propriétés diverses des coefficients binomiaux : expression en terme de factorielles, symétrie, triangle de Pascal.
- ★ Formule du binôme de Newton et exemples de calculs de somme. Technique de linéarisation en trigo.
- ★ Sommes doubles (rectangulaires, triangulaires).

ÉTUDE DE FONCTIONS

- ★ Généralités : fonctions paires, impaires, périodiques, monotones, minorées/majorées/bornées. Description avec des quantificateurs et lien avec le graphe de la fonction.
- ★ Effet sur le graphe des transformations usuelles : translation à la source ou au but, dilatation à la source ou au but, retournement.
- ★ Déterminer le domaine de définition et de dérivabilité d'une fonction à partir des fonctions usuelles.
- ★ Étude des variations d'une fonction dérivable (signe de la dérivée).
- ★ Équation de la tangente au graphe d'une fonction.
- ★ Étude de la position relative à une droite.
- ★ Utilisation de la convexité (graphe situé sous toutes ses tangentes) et caractérisation de la convexité avec les dérivées.
- ★ Rappels sur les calculs des limites (version terminale) + calculs de dérivée.

! Le TD sur les fonctions aura lieu seulement mardi/mercredi; avant cela proposer sur ce thème des exercices plutôt accessibles depuis la terminale.

### Ce que le programme ne contient pas :

- ★ des exercices avancés sur les nombres complexes (les aspects géométriques seront bientôt approfondis)
- ★ du dénombrement,
- ★ des exercices utilisant le théorème des valeurs intermédiaires ou de la bijection monotone,
- ★ des exercices théoriques sur la convexité (dont nous n'avons pas manipulé la vraie définition!),
- ★ du calcul asymptotique (pas de détermination d'asymptote non horizontales à l'infini sauf cas simples),
- ★ les fonctions trigonométriques réciproques.

### Questions de cours possibles.

- ★ Linéariser  $\sin^5(x)$  pour  $x$  réel.
- ★ Somme des  $n$  premiers entiers, démonstration par retournement.
- ★ Somme géométrique avec démonstration.
- ★ Factorisations de  $a^n - b^n$  et  $a^n + b^n$  (si possible...), avec démonstration.
- ★ Coefficients binomiaux : expression avec les factorielles et démonstration de la formule de Pascal.
- ★ Formule du binôme de Newton avec démonstration (récurrence).
- ★ Toute fonction s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire (analyse et synthèse). Application à l'exponentielle.
- ★ Énoncé du théorème des valeurs intermédiaires, deux versions (sans démonstration).
- ★ La composée de deux fonctions monotones est monotone (montrer un des 4 cas...) + contre-exemple pour le produit de deux fonctions.