

Colle n°3

Semaine du 29/09/2025

Ce que le programme contient :

SOMMES, PRODUITS, COEFFICIENTS BINOMIAUX

- Notation \sum et propriétés : linéarité, relation de Chasles, changements d'indice (de type glissement ou retournement), somme télescopique, séparation des termes de rangs pairs et impairs.
- Positivité de \sum . Inégalité triangulaire.
- Sommes usuelles : pour $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- Notation \prod et exemples d'utilisations, factorielle. Propriétés des produits finis vues par analogie de celles des sommes (produit télescopique, Chasles, factorisation...)
- Expression, interprétations et propriétés diverses des coefficients binomiaux : expression en terme de factorielles, symétrie, triangle de Pascal.
- Formule du binôme de Newton et exemples de calculs de somme. Technique de linéarisation en trigo.
- Sommes doubles (rectangulaires, triangulaires).

ÉTUDE DE FONCTIONS

- Généralités : fonctions paires, impaires, périodiques, monotones, minorées/majorées/bornées. Description avec des quantificateurs et lien avec le graphe de la fonction.
- Effet sur le graphe des transformations usuelles : translation à la source ou au but, dilatation à la source ou au but, retournement.
- Déterminer le domaine de définition et de dérivabilité d'une fonction à partir des fonctions usuelles.
- Étude des variations d'une fonction dérivable (signe de la dérivée).
- Équation de la tangente au graphe d'une fonction.
- Étude de la position relative à une droite.
- Utilisation de la convexité (graphe situé sous toutes ses tangentes) et caractérisation de la convexité avec les dérivées.
- Rappels sur les calculs des limites (version terminale) + calculs de dérivée.

! Le TD sur les fonctions aura lieu seulement mardi/mercredi; avant cela proposer sur ce thème des exercices plutôt accessibles depuis la terminale.

Ce que le programme ne contient pas :

- des exercices avancés sur les nombres complexes (les aspects géométriques seront bientôt approfondis)
- du dénombrement,
- des exercices utilisant le théorème des valeurs intermédiaires ou de la bijection monotone,
- des exercices théoriques sur la convexité (dont nous n'avons pas manipulé la vraie définition!),
- du calcul asymptotique (pas de détermination d'asymptote non horizontales à l'infini sauf cas simples),
- les fonctions trigonométriques réciproques.

Questions de cours possibles.

- Linéariser $\sin^5(x)$ pour x réel.
- Somme des n premiers entiers, démonstration par retournement.
- Somme géométrique avec démonstration.
- Factorisations de $a^n - b^n$ et $a^n + b^n$ (si possible...), avec démonstration.
- Coefficients binomiaux : expression avec les factorielles et démonstration de la formule de Pascal.
- Formule du binôme de Newton avec démonstration (réurrence).
- Toute fonction s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire (analyse et synthèse). Application à l'exponentielle.
- Énoncé du théorème des valeurs intermédiaires, deux versions (sans démonstration).
- La composée de deux fonctions monotones est monotone (montrer un des 4 cas...) + contre-exemple pour le produit de deux fonctions.