

Colle n°6

Semaine du 03/11/2025

Ce que le programme contient :

NOMBRES COMPLEXES

- ★ Calcul algébrique dans $\mathbb{C}$ (binôme de Newton, somme géométrique, factorisation de $a^n - b^n$..), linéarité de la partie réelle/imaginaire. Représentation géométrique dans $\mathbb{C}$.
- ★ Cercle trigonométrique, exponentielle complexe, forme exponentielle d'un nombre complexe. Formules d'Euler, factorisation par l'arc moitié.
- ★ Racines carrées d'un nombre complexe, sous forme exponentielle ou algébrique.
- ★ Polynômes du second degré à coefficients complexes : discriminant, racine, forme factorisée. Cas d'un polynôme réel au discriminant strictement négatif.
- ★ Application à la résolution d'un système somme-produit.
- ★ Application à la détermination du terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2, dans tous les cas (racines distinctes, racine double, forme trigonométrique dans le cas d'une suite réelle avec racines complexes conjuguées).
- ★ Racines n -ièmes de l'unité : forme générale, somme des racines. Application à la détermination des racines n -ièmes d'un nombre complexe sous forme exponentielle.
- ★ Géométrie : affixe d'un vecteur, norme. Expression de l'angle avec l'argument du quotient des affixes. Condition d'alignement et d'orthogonalité avec des nombres complexes.
- ★ Transformations du plan : symétrie donnée par la conjugaison, translations, rotations, homothéties.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE 1

Objet d'étude : $y' + ay = b$ avec $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ des fonctions continues, $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ l'inconnue, supposée dérivable, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- ★ Vocabulaire des équations différentielles : forme résolue, linéaire, second membre, équation homogène associée.
- ★ Structure des solutions pour une équation différentielle linéaire : si y_p est une solution particulière et S_h l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée, $S = \{y_p + y_h ; y_h \in S_h\}$.
- ★ À l'ordre 1, détermination de S_h à l'aide d'une primitive de a .
- ★ Recherche d'une solution particulière : recherche sous forme particulière (second terme constant, polynomial, exponentiel ou sinusoidal ; sans chercher trop de raffinement) ou plus systématique **méthode de la variation de la constante**. Principe de superposition en cas de second membre ad hoc.
- ★ Conclusion : l'ensemble des solutions est une droite affine, mise en forme précise du résultat.

 pour les colles du lundi, on n'a pas encore eu le temps d'aborder en cours la notion de problème de Cauchy mais les élèves ont vu en physique comment déterminer la constante à l'aide d'une donnée initiale.

Ce que le programme ne contient pas :

- ★ l'étude générale d'une similitude,
- ★ des équations différentielles d'ordre 2 ou à valeurs vectorielles,
- ★ des équations différentielles non linéaires

Questions de cours possibles.

- ★ Inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$, avec le cas d'égalité.
- ★ Déterminer le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
- ★ Décrire une transformation géométrique donnée par $z \mapsto az$ avec la forme exponentielle de a .
- ★ Forme des racines n -ièmes de l'unité (avec démonstration).
- ★ Forme de la solution d'une équation linéaire homogène d'ordre 1 (avec démonstration).
- ★ Exemple : résolution de $y' + ty = t^3$ sur $\mathbb{R}$.