Colle n°11

Semaine du 08/12/2025

Ce que le programme contient :

CALCUL MATRICIEL

- ⋆ Définition des matrices et des ensembles de matrices.
- ⋆ Opérations sur les matrices : somme, multiplication externe, produit matriciel, transposition. Conditions de définition de ces opérations. Propriétés : associativité, distributivité, non-commutativité du produit.
- ⋆ Lien avec les systèmes linéaires. Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice et résolution en notation matricielle d'un système linéaire.
- ⋆ Matrices carrées et cas particuliers : diagonale, triangulaire (inférieure ou supérieure), (anti)symétrique.
- ⋆ Matrices inversibles. Lien entre matrices inversibles et la résolution de systèmes linéaires. Méthode de Gauss-Jordan pour déterminer si une matrice est inversible et, si c'est le cas, obtenir l'inverse.
- ⋆ Critère d'inversibilité pour les matrices diagonales et triangulaires.
- ⋆ Puissances d'une matrice carré. Binôme de Newton pour des matrices.

Remarque : la notion de trace n'est pas au programme de 1e année, mais peut faire l'objet d'exercices introductifs.

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE SUITES NUMÉRIQUES

- ⋆ Définition de la convergence d'une suite avec des quantificateurs. Divergence vers $\pm\infty$. Unicité de la limite.
- ⋆ Opérations sur les limites, formes indéterminées et quelques méthodes pour les lever.
- ⋆ Croissances comparées usuelles pour les suites.
- ⋆ Une suite convergente est bornée, non nulle à partir d'un certain rang si la limite est non nulle.
- ⋆ Composition par une fonction continue.
- ⋆ Passage à la limite dans une inégalité.
- ⋆ Théorèmes d'existence de limite : théorème d'encadrement (ou des gendarmes), théorème de majoration ou minoration par une suite divergente, théorème de la convergence monotone, théorème des suites adjacentes.
- ⋆ Convergence des suites à valeurs complexes, caractérisation avec les suites des parties réelle et imaginaire.
- ⋆ Suites extraites. Propriétés induites sur les suites extraites. Si les suites extraites de rang pair et de rang impair convergent vers la même limite, alors la suite initiale est convergente.
- ⋆ Comparaison asymptotique et notations de Landau : petit-o, grand-O, équivalent.
- ⋆ Propriétés des équivalents : produit, quotient, puissance d'exposant constant.
- ⋆ Quelques équivalents usuels : si $\varepsilon_n \to 0$, équivalent des suites

$$(\sin(\varepsilon_n)),\quad (\tan(\varepsilon_n)),\quad (\ln(1+\varepsilon_n)),\quad (\exp(\varepsilon_n)-1),\quad (1-\cos(\varepsilon_n))\quad \text{et}\quad ((1+\varepsilon_n)^\alpha - 1)$$

  pour α une constante réelle. Application à la détermination d'équivalents variés.

Ce que le programme ne contient pas :

- ⋆ des choses trop sophistiquées avec des suites extraites (le théorème de Bolzano-Weierstrass est hors-programme)
- ⋆ la notion de borne supérieure / borne inférieure.

Questions de cours possibles.

- ⋆ Définition de "$u_n = o(v_n)$ si (v_n) ne s'annule pas ; caractérisation valable si (v_n) s'annule éventuellement.
- ⋆ Montrer que $u_n + v_n \simeq v_n$ si et seulement si $u_n = o(v_n)$, pour une suite v_n qui ne s'annule pas.
- ⋆ Montrer que si u_n et v_n sont équivalentes et ne s'annulent pas, être négligeable devant (u_n) est équivalent à être négligeable devant (v_n).
- ⋆ Montrer que si deux suites sont équivalentes et l'une tend vers une limite (finie ou infinie), alors l'autre tend vers la même limite. Réciproquement, montrer que deux suites qui convergent vers une même limite non nulle sont équivalentes. Contre-exemple si la limite est nulle.
- ⋆ Montrer que deux suites équivalentes sont de même signe à partir d'un certain rang.
- ⋆ Montrer par un contre-exemple que la somme d'équivalents de deux suites n'est pas forcément équivalente à la somme des deux suites.
- ⋆ Montrer par un contre-exemple que les composées de deux suites équivalentes par une même fonction continue ne sont pas forcément équivalentes.