

Colle n°12

Semaine du 15/12/2025

Ce que le programme contient :

CALCUL MATRICIEL

- ★ Définition des matrices et des ensembles de matrices.
- ★ Opérations sur les matrices : somme, multiplication externe, produit matriciel, transposition. Conditions de définition de ces opérations. Propriétés : associativité, distributivité, non-commutativité du produit.
- ★ Lien avec les systèmes linéaires. Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice et résolution en notation matricielle d'un système linéaire.
- ★ Matrices carrées et cas particuliers : diagonale, triangulaire (inférieure ou supérieure), (anti)symétrique.
- ★ Matrices inversibles. Lien entre matrices inversibles et la résolution de systèmes linéaires. Méthode de Gauss-Jordan pour déterminer si une matrice est inversible et, si c'est le cas, obtenir l'inverse.
- ★ Critère d'inversibilité pour les matrices diagonales et triangulaires.
- ★ Puissances d'une matrice carré. Binôme de Newton pour des matrices.

Remarque : la notion de trace n'est pas au programme de 1^e année, mais peut faire l'objet d'exercices introductifs.

LIMITES DE FONCTION : EXISTENCE ET CALCUL

- ★ Limite en un point au bord ou dans le domaine de définition. Définition avec des quantificateurs dans tous les cas. Limite à gauche, limite à droite. Unicité de la limite.
- ★ Opérations sur les limites, composition des limites.
- ★ Caractérisation séquentielle de la limite.
- ★ Existence des limites à gauche et à droite pour les fonctions monotones.
- ★ Théorème d'encadrement ou de comparaison pour l'existence d'une limite.
- ★ Conséquences de l'existence de limites finies : fonction bornée au voisinage du point, passage à la limite dans une équation ou une inégalité large.
- ★ Notations de Landau pour les fonctions. Équivalence ou négligeabilité en un point. Utilisation pour déterminer des limites.
- ★ Quelques développements limités usuels en 0 (et les équivalents associés) : sin, tan, cos, $x \mapsto \ln(1+x)$, $\exp, x \mapsto (1+x)^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ un exposant constant.
- ★ Calcul d'asymptotes au graphe d'une fonction : asymptotes verticales, ou obliques en $\pm\infty$.

⚠ Les manipulations avec les notations de Landau sont encore en cours d'apprentissage, et certains points de formalisme seront éclairés en janvier ; prévoir des calculs raisonnables et guidés si besoin.

Ce que le programme ne contient pas :

- ★ des déterminants, des espaces vectoriels, des applications linéaires...
- ★ des exercices portant sur la continuité des fonctions,
- ★ des opérations théoriques sur les DL (un chapitre y sera consacré plus tard)
- ★ le théorème de Bolzano-Weierstrass, la densité des irrationnels.

Questions de cours possibles.

- ★ Composition de limites : si $\lim_a f = b$ et $\lim_b g = c$ et si $g \circ f$ est défini, alors $\lim_a g \circ f = c$.
Démonstration dans le cas a, c finis et $b = +\infty$ ou $a = -\infty, b$ fini et $c = +\infty$.
- ★ Montrer que la partie entière est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et discontinue en tout point de \mathbb{Z} .
- ★ Inverser une matrice explicite de taille 3×3 .
- ★ Prolonger par continuité la fonction $x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$ après avoir déterminé son domaine de définition.

Joyeuses fêtes !