

Colle n°13

Semaine du 05/01/2026

Ce que le programme contient :

LIMITES DE FONCTION : EXISTENCE ET CALCUL

- ★ Limite en un point au bord ou dans le domaine de définition. Définition avec des quantificateurs dans tous les cas. Limite à gauche, limite à droite. Unicité de la limite.
- ★ Opérations sur les limites, composition des limites.
- ★ Caractérisation séquentielle de la limite.
- ★ Existence des limites à gauche et à droite pour les fonctions monotones.
- ★ Théorème d'encadrement ou de comparaison pour l'existence d'une limite.
- ★ Conséquences de l'existence de limites finies : fonction bornée au voisinage du point, passage à la limite dans une équation ou une inégalité large.
- ★ Notations de Landau pour les fonctions. Équivalence ou négligeabilité en un point. Utilisation pour déterminer des limites.
- ★ Quelques développements limités usuels en 0 (et les équivalents associés) : sin, tan, cos, $x \mapsto \ln(1 + x)$, $\exp, x \mapsto (1 + x)^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ un exposant constant.
- ★ Calcul d'asymptotes au graphe d'une fonction : asymptotes verticales, ou obliques en $\pm\infty$.

CONTINUITÉ

- ★ Définition de la continuité en un point du domaine : f continue en a si et seulement si f admet une limite finie en a qui vaut $f(a)$. Caractérisation avec la limite à gauche et à droite en un point.
- ★ Continuité sur un intervalle. Opérations sur les fonctions continues. Continuité des fonctions usuelles.
- ★ Caractérisation séquentielle de la continuité.
- ★ Prolongement par continuité.
- ★ Propriété des fonctions continues : théorème des valeurs intermédiaires, théorème de la bijection monotone, théorème des bornes atteintes.
- ★ Extension aux fonctions à valeurs complexes.

Nous avons abordé les suites récurrentes données par une fonction ($u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Les élèves doivent pouvoir se lancer dans l'étude de la suite et de son comportement asymptotique de manière à peu près autonome : recherche d'intervalles stables, de points fixes de f , conséquences de la monotonie de f , du signe de $x \mapsto f(x) - x$...

Ce que le programme ne contient pas :

- ★ des opérations théoriques sur les DL (un chapitre y sera consacré plus tard) : on pourra donner les règles de manipulations au cas par cas,
- ★ le théorème de Bolzano-Weierstrass, la densité des irrationnels.

Questions de cours possibles.

- ★ Composition de limites : si $\lim_a f = b$ et $\lim_b g = c$ et si $g \circ f$ est défini, alors $\lim_a g \circ f = c$.
Démonstration dans le cas a, c finis et $b = +\infty$ ou $a = -\infty, b$ fini et $c = +\infty$.
- ★ Définition quantifiée de la limite finie ou infinie en un point fini ou infini au bord du domaine, dans n'importe quel cas (aussi limite à gauche / limite à droite).
- ★ Montrer que la partie entière est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et discontinue en tout point de \mathbb{Z} .
- ★ Prolonger par continuité la fonction $x \mapsto (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ après avoir déterminé son domaine de définition.
- ★ Développements limités en 0 de cos, sin, tan, $x \mapsto \ln(1 + x)$, \exp ou $x \mapsto (1 + x)^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ un exposant **constant** et utilisation pour déterminer une limite ou un équivalent simple.

Joyeuses fêtes à toutes et tous !

