

## Colle n°16

Semaine du 02/02/2026

### Ce que le programme contient :

#### POLYNÔMES

- ★ Polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  ou  $\mathbb{C}[X]$  définis comme suite presque nulle de coefficients réels ou complexes. Fonction polynomiale associée.
- ★ Généralités : degré, coefficient dominant, polynômes unitaires, ensembles de polynômes.
- ★ Opérations sur les polynômes : somme, produit, composition, dérivation.
- ★ Propriétés du degré par rapport aux opérations.
- ★ Formule de Taylor pour les polynômes.
- ★ Arithmétique des polynômes, théorème de division euclidienne.
- ★ Racines d'un polynôme et lien avec l'arithmétique.
- ★ Lien entre degré et nombre de racines.
- ★ Multiplicité d'une racine : caractérisations arithmétique et par les polynômes dérivés.
- ★ Exemples de détermination du reste d'une division euclidienne à l'aide des racines, éventuellement multiples, du diviseur.
- ★ Théorème de d'Alembert-Gauss (admis), irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  et  $\mathbb{C}[X]$ .
- ★ Théorèmes de factorisation dans  $\mathbb{R}[X]$  et  $\mathbb{C}[X]$  (unicité admise).
- ★ Polynômes scindés, scindés à racines simples.
- ★ Décomposition en éléments simples de fractions rationnelles. (admise)  
(seule la forme pour un dénominateur scindé à racines simples est au programme, sinon il faut indiquer la forme à obtenir)

Les exercices sur irréductibles, factorisation, polynômes scindés et décomposition en éléments simples ne seront vus en TD que mardi et mercredi matin.

### Ce que le programme ne contient pas :

- ★ la notion de polynômes premiers entre eux, le pgcd de deux polynômes,
- ★ des polynômes sur autre chose que  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### Questions de cours possibles.

- ★ Énoncé du théorème de la division euclidienne pour des polynômes + application à un exemple.
- ★ Énoncer la formule de Leibniz pour des polynômes et en déduire que s'il existe un polynôme  $Q$  tel que  $P = (X - \alpha)^m Q$  et  $Q(\alpha) \neq 0$ , alors  $P(\alpha) = \dots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$  et  $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$ .
- ★ Énoncer la formule de Taylor pour un polynôme et en déduire que si  $P(\alpha) = \dots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ , alors  $(X - \alpha)^m$  divise  $P$ .
- ★ Donner un énoncé précis de la factorisation d'un polynôme dans  $\mathbb{C}[X]$  et  $\mathbb{R}[X]$  + factorisation de  $X^4 + 1$  dans  $\mathbb{R}$  et dans  $\mathbb{C}$ .
- ★ Montrer que si  $P$  est un polynôme à coefficients réels et  $\alpha$  est une racine de  $P$ , alors  $\bar{\alpha}$  est aussi racine, avec la multiplicité.