Colle n°20

Semaine du 16/03/2026

Ce que le programme contient :

Espaces vectoriels (début)

Très peu de TD traité pour l'instant. Méthodes à connaître :

- ⋆ montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel,
- ⋆ montrer qu'une famille finie de vecteurs est libre,
- ⋆ montrer qu'une famille de vecteurs est génératrice d'un sous-espace vectoriel,
- ⋆ jongler entre les différentes écritures (forme paramétrée / Vect(...) / équation cartésienne) des droites vectorielles et des plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ (usage du produit vectoriel autorisé pour obtenir rapidement des équations cartésiennes et s'entraîner à faire un peu de géométrie).

Développements limités

- ⋆ Formule de Taylor avec reste intégral (non exigible) et inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n.
- ⋆ Notion de développement limité. Unicité du développement limité. Formule de Taylor-Young.
- ⋆ Lien entre développement limité à l'ordre 1 et dérivabilité.
- ⋆ Opérations sur les développements limités : sommes, produit, composition, primitivation.
- ⋆ Développements limités usuels.
- ⋆ Recherche d'équivalent à l'aide des développements limités.
- ⋆ Équation de la tangente au graphe en un point et position relative à cette tangente à l'aide du développement limité en ce point.
- ⋆ Recherche de développement limité de fonctions définies implicitement (ex : bijection réciproque)

Ce que le programme ne contient <u>pas</u> :

- ⋆ des développements asymptotiques, ou alors de manière très guidée,
- ⋆ des calculs <u>trop</u> techniques : les machines sont là pour ça,
- ⋆ des applications linéaires,
- ⋆ la notion de dimension.

Questions de cours possibles.

- ⋆ Montrer que l'ensemble des fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
- ⋆ Montrer que si $(v_1, \cdots, v_n)$ est une base de E, tout vecteur de E s'écrit d'une manière unique comme combinaison linéaire des v_i.
- ⋆ Montrer que si $(v_1, \cdots, v_n) \in E^n$ est tel que tout vecteur de E s'écrit d'une manière unique comme combinaison linéaire des v_i, alors $(v_1, \cdots, v_n)$ est une base de E.
- ⋆ Déterminer une famille génératrice de l'ensemble des solutions de $\begin{cases} x+y+t=0, \\ x+y-2z=0. \end{cases}$
- ⋆ Montrer que deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe si et seulement si leur intersection est réduite au singleton trivial.