Colle n°21

Semaine du 23/03/2026

Ce que le programme contient :

ESPACES VECTORIELS & APPLICATIONS LINÉAIRES

- ⋆ Définition d'un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: opérations et axiomes de calcul.
- ⋆ Espaces vectoriels usuels : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
- ⋆ Combinaison linéaire d'une famille de vecteurs, sous-espaces vectoriels.
- ⋆ Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs.
- ⋆ Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel.
- ⋆ Famille libre ou liée d'un espace vectoriel.
- ⋆ Bases d'un sous-espace vectoriel. Bases canoniques des espaces usuels.
- ⋆ Intersections de sous-espaces vectoriels, somme de sous-espaces vectoriels.
- ⋆ Sous-espaces vectoriels en somme directe + caractérisation avec leur intersection, sous-espaces vectoriels supplémentaires.
- ⋆ Base adaptée à une décomposition en somme directe.

- ⋆ Applications linéaires. Endomorphismes. Opérations sur les applications linéaires. L'ensemble des applications linéaires entre deux ev est un espace vectoriel.
- ⋆ Noyau et image. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité.
- ⋆ Isomorphismes, automorphismes, caractérisation de la bijectivité à l'aide d'une base. Identification de $\mathbb{R}^n$ à l'ensemble des matrices lignes ou colonnes de taille n au besoin.
- ⋆ Puissances d'endomorphismes (itération).
- ⋆ Endomorphismes remarquables. Homothéties et rotations vectorielles. Projecteur et symétrie associés à une décomposition en sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Attention les exercices sur les endomorphismes remarquables ne seront traités en TD que mardi et mercredi.

Ce que le programme ne contient pas :

- ⋆ la dimension (pour l'instant !)

Questions de cours possibles.

- ⋆ Montrer que l'ensemble des fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
- ⋆ Déterminer une famille génératrice de l'ensemble des solutions de $\left\{ \begin{array}{l} x + y + t = 0, \\ x + y - 2z = 0. \end{array} \right.$
- ⋆ Montrer que le noyau et l'image d'une application linéaire sont des sous-espaces vectoriels.
- ⋆ Montrer qu'une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est réduit au singleton trivial.
- ⋆ Montrer que si $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E et $f : E \to F$ est une application linéaire telle que $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ est une base de F, alors l'application f est bijective.
- ⋆ Montrer que deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe si et seulement si leur intersection est réduite au singleton trivial.
- ⋆ Vérification sur des exemples simples qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel, ou qu'une application est linéaire.
- ⋆ Montrer que p est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$.