

Colle n°23

Semaine du 20/04/2026

Ce que le programme contient :

INTÉGRATION SUR UN SEGMENT DE FONCTIONS CONTINUES

On complète les techniques étudiées en début d'année (intégration par parties, recherche de primitives... à tester encore!) avec la théorie de l'intégration de Riemann.

- ★ Définition de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment (fonctions en escalier + subdivisions), interprétation géométrique.
- ★ Sommes de Riemann.
- ★ Propriétés : linéarité, positivité (stricte), inégalité de la moyenne, relation de Chasles.
- ★ Intégrale et primitive, fonctions définies avec des intégrales.
- ★ Intégration des fonctions continues à variable réelle et valeurs complexes.

ESPACES VECTORIELS & APPLICATIONS LINÉAIRES

- ★ Définition d'un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} : opérations et axiomes de calcul.
- ★ Espaces vectoriels usuels : \mathbb{K}^n , $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
- ★ Combinaison linéaire d'une famille de vecteurs, sous-espaces vectoriels.
- ★ Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs.
- ★ Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel.
- ★ Famille libre ou liée d'un espace vectoriel.
- ★ Bases d'un sous-espace vectoriel. Bases canoniques des espaces usuels.
- ★ Intersections de sous-espaces vectoriels, somme de sous-espaces vectoriels.
- ★ Sous-espaces vectoriels en somme directe + caractérisation avec leur intersection, sous-espaces vectoriels supplémentaires.
- ★ Base adaptée à une décomposition en somme directe.
- ★ Applications linéaires. Endomorphismes. Opérations sur les applications linéaires. L'ensemble des applications linéaires entre deux ev est un espace vectoriel.
- ★ Noyau et image. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité.
- ★ Isomorphismes, automorphismes, caractérisation de la bijectivité à l'aide d'une base. Identification de \mathbb{R}^n à l'ensemble des matrices lignes ou colonnes de taille n au besoin.
- ★ Puissances d'endomorphismes (itération).
- ★ Endomorphismes remarquables. Homothéties et rotations vectorielles. Projecteur et symétrie associés à une décomposition en sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Ce que le programme ne contient pas :

- ★ la dimension ; mais le cours a avancé et les élèves peuvent commencer à utiliser des arguments rapides...
- ★ des intégrales impropres,
- ★ des intégrales à paramètre dans l'intégrande (en tout cas pas la théorie générale).

Questions de cours possibles.

- ★ Montrer que p est un projecteur si $p \circ p = p$.
- ★ Convergence de la somme de Riemann (énoncé)
+ calcul de $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k+n}$.
- ★ Montrer que si f est une fonction continue sur un segment I , $|\int_I f| \leq \int_I |f|$ (avec la propriété de positivité)
+ majoration de $\int_0^{2\pi} t \cos(t) dt$.
- ★ Démontrer : si u et v sont dérivables et f continue, $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f$ est dérivable de dérivée...
+ application à $x \mapsto \int_x^{x^2} \ln(t) dt$.
- ★ Si $\dim_E = n$, une famille de n vecteurs de E est libre si et seulement si elle est génératrice de E .
(en utilisant la comparaison entre cardinal d'une famille libre/génératrice et la dimension).
- ★ Formule de Grassmann (sans démonstration) et application à la caractérisation de la supplémentarité avec la dimension (une équivalence au choix).