

## Colle n°24

Semaine du 27/04/2026

### Ce que le programme contient :

#### INTÉGRATION SUR UN SEGMENT DE FONCTIONS CONTINUES

On complète les techniques étudiées en début d'année (intégration par parties, recherche de primitives... à tester encore!) avec la théorie de l'intégration de Riemann.

- ★ Définition de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment (fonctions en escalier + subdivisions), interprétation géométrique.
- ★ Sommes de Riemann.
- ★ Propriétés : linéarité, positivité (stricte), inégalité de la moyenne, relation de Chasles.
- ★ Intégrale et primitive, fonctions définies avec des intégrales.
- ★ Intégration des fonctions continues à variable réelle et valeurs complexes.

#### ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

- ★ Théorèmes de la base extraite, de la base incomplète.
- ★ Comparaison entre les cardinaux des familles libres et génératrices d'un espace vectoriel.
- ★ Définition de la dimension. Dimension des espaces vectoriels usuels.
- ★ Conditions suffisantes pour être une base, en dimension finie.
- ★ Si deux espaces vectoriels de même dimension sont contenus l'un dans l'autre, ils sont égaux.
- ★ Base adaptée à un sous-espace vectoriel. Formule de Grassmann.
- ★ Caractérisation de la supplémentarité avec la dimension.
- ★ Rang d'une famille vecteurs et d'une application linéaire.
- ★ Conséquence de l'injectivité / surjectivité d'une application linéaire en terme de dimension des espaces de départ et d'arrivée. Un isomorphisme linéaire conserve les dimensions.
- ★ Théorème du rang (version "supplémentaire") et formule du rang.
- ★ Équivalence entre injectivité et surjectivité pour les applications linéaires entre espaces vectoriels de même dimension.

### Ce que le programme ne contient pas :

- ★ la représentation matricielle des applications linéaires
- ★ des intégrales impropres,
- ★ des intégrales à paramètre dans l'intégrande (en tout cas pas la théorie générale).

### Questions de cours possibles.

- ★ Si  $\dim E = n$ , une famille de  $n$  vecteurs de  $E$  est libre si et seulement si elle est génératrice de  $E$ .
- ★ En admettant la formule de Grassmann, démontrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires si et seulement leur somme est directe et la somme des dimensions est égale à la dimension de l'espace ambiant.
- ★ Énoncer la formule du rang et en déduire qu'une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension est injective ssi elle est surjective.
- ★ Déterminer le rang d'une famille de vecteurs explicites de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$  ou  $\mathbb{R}^4$  (comme nombre de pivots dans le système linéaire caractérisant les relations de liaison).
- ★ Si  $\sum_{k \geq n_0} u_k$  est une série convergente, alors  $u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ , et contre-exemple de la réciproque.
- ★ Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la série de Riemann  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .