

Colle n°25

Semaine du 04/05/2026

Ce que le programme contient :

SÉRIES NUMÉRIQUES

On réservera donc les exercices plus corsés sur les séries pour la semaine suivante, en testant cette semaine plutôt le vocabulaire spécifique du chapitre et les manipulations de bases sur des exemples explicites pas trop techniques (mais pouvant faire appel aux outils d'analyse asymptotique étudiés jusqu'ici).

★ Notation $\sum_{k \geq n_0} u_k$ pour la série de terme général u_k , suite des sommes partielles associées.

★ Convergence (simple) d'une série : somme de la série notée $\sum_{k=n_0}^{\infty} u_k$, cas de la divergence grossière, suite des restes d'une série convergente.

★ Séries télescopiques.

★ Linéarité de la somme pour les séries convergentes, changement d'indices.

★ Séries de référence : séries géométriques (aussi dans \mathbb{C}), exponentielles (aussi dans \mathbb{C}) ou de Riemann.

★ Exemples de comparaison série/intégrale (sur un segment).

★ Théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs : majoration ou négligeabilité du terme général par celui d'une série convergente, équivalence du terme général avec celui d'une série dont on connaît la nature.

★ Convergence absolue : la convergence absolue implique convergence simple. Série semi-convergente.

★ Caractérisation de la convergence d'une série numérique à valeurs complexes par la convergence des séries des parties réelles et des parties imaginaires.

ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

★ Théorèmes de la base extraite, de la base incomplète.

★ Comparaison entre les cardinaux des familles libres et génératrices d'un espace vectoriel.

★ Définition de la dimension. Dimension des espaces vectoriels usuels.

★ Conditions suffisantes pour être une base, en dimension finie.

★ Si deux espaces vectoriels de même dimension sont contenus l'un dans l'autre, ils sont égaux.

★ Base adaptée à un sous-espace vectoriel. Formule de Grassmann.

★ Caractérisation de la supplémentarité avec la dimension.

★ Rang d'une famille vecteurs et d'une application linéaire.

★ Conséquence de l'injectivité / surjectivité d'une application linéaire en terme de dimension des espaces de départ et d'arrivée. Un isomorphisme linéaire conserve les dimensions.

★ Théorème du rang (version "supplémentaire") et formule du rang.

★ Équivalence entre injectivité et surjectivité pour les applications linéaires entre espaces vectoriels de même dimension.

Ce que le programme ne contient pas :

★ la représentation matricielle des applications linéaires,

★ le critère des séries alternées (seulement au programme de l'année prochaine) ; ou alors en guidant,

★ le critère de Cauchy, ou d'Abel, les produits de Cauchy.

Questions de cours possibles.

★ Énoncer la formule du rang et en déduire qu'une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension est injective ssi elle est surjective

★ Déterminer le rang d'une famille de vecteurs explicites de \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 ou \mathbb{R}^4 (comme nombre de pivots dans le système linéaire caractérisant les relations de liaison) ou d'une matrice de petite taille.

★ Si $\sum_{k \geq n_0} u_k$ est une série convergente, alors $u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, et contre-exemple de la réciproque.

★ Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la série de Riemann $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

★ Déterminer la nature d'une série à l'aide d'un équivalent simple.

★ Montrer qu'une matrice carrée est inversible si et seulement si l'application linéaire canoniquement associée est bijective et en déduire la caractérisation de l'inversibilité d'une matrice en terme de rang et de noyau.