

Colle n°26

Semaine du 18/05/2026

Ce que le programme contient :

SÉRIES NUMÉRIQUES

Reprise du programme précédent.

MATRICES D'APPLICATIONS LINÉAIRES

- ★ Application linéaire canoniquement associée à une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- ★ Rang d'une matrice défini comme rang de ses vecteurs colonnes ou de l'application linéaire associée. Calcul du rang avec le pivot de Gauss. La transposée conserve le rang (démonstration vue mais non exigible).
- ★ Représentation en colonne des coordonnées d'un vecteur dans une base. Cela définit un isomorphisme de l'ev dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, qui préserve les structures linéaires (indépendance, rang...)
- ★ Matrice de changement de bases, et son inverse.
- ★ Représentation matricielle d'une application linéaire dans des bases. Isomorphisme entre applications linéaires et espace de matrices de taille correspondante, dimension de $\mathcal{L}(E, F)$.
- ★ Lien entre composition d'applications et produit matriciel, calcul d'image et produit par une colonne.
- ★ Le rang d'une application est égal au rang de sa matrice dans n'importe quelles bases.
- ★ Cas des endomorphismes : puissances et polynômes d'un endomorphisme (et de la matrice carrée associée).
- ★ Un endomorphisme est bijectif ssi sa représentation matricielle dans n'importe quelle base l'est.
- ★ Matrices semblables.
- ★ Base adaptée à un endomorphisme : cas des projecteurs.

⚠ Notations choisies (j'ai changé par rapport à l'année dernière) :

- ★ on a noté $[v]_{\mathcal{B}} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ le vecteur des coordonnées d'un vecteur v dans une base \mathcal{B} de cardinal n ,
- ★ on a noté $[f]_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\mathcal{B}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la représentation matricielle d'une application linéaire f avec \mathcal{B} comme base de l'espace de départ (de dimension p) et $\tilde{\mathcal{B}}$ comme base de l'espace d'arrivée (de dimension n), et $[f]_{\mathcal{B}}$ pour un endomorphisme avec la même base au départ et à l'arrivée,
- ★ on a noté $[\tilde{\mathcal{B}}]_{\mathcal{B}}$ la matrice de passage de \mathcal{B} (ancienne base) "vers" $\tilde{\mathcal{B}}$ (nouvelle base), de sorte que pour un vecteur v la formule de changement de bases s'écrit : $[v]_{\mathcal{B}} = [\tilde{\mathcal{B}}]_{\mathcal{B}}[v]_{\tilde{\mathcal{B}}}$.

On a démarré le cours sur le déterminant et les élèves pourront l'utiliser si ça les arrange.

Ce que le programme ne contient pas :

- ★ le critère des séries alternées (seulement au programme de l'année prochaine) ; ou alors en guidant,
- ★ le critère de Cauchy, ou d'Abel, les produits de Cauchy,
- ★ des exercices sur les déterminants en tant que tels.

Questions de cours possibles.

- ★ Montrer la formule de changement de bases pour un vecteur, et que l'inverse d'une matrice de passage et la matrice du passage inverse.
- ★ Montrer que le rang d'une application linéaire est égal au rang de sa matrice dans n'importe quelles bases.
- ★ Montrer qu'une matrice carrée est inversible si et seulement si l'application linéaire canoniquement associée est bijective et en déduire la caractérisation de l'inversibilité d'une matrice en terme de rang et de noyau.
- ★ Démontrer l'invariance du déterminant par transposition, en s'appuyant sur les matrices des opérations élémentaires (transvection, dilatation, permutation).