Colle n°30

Semaine du 15/06/2026

Fonctions de <u>deux</u> variables à valeurs réelles

On a commencé le chapitre sur les fonctions de deux variables, mais les élèves n'ont pas encore eu beaucoup l'occasion de pratiquer en TD. Le programme de PCSI stipule "La notion de continuité est introduite uniquement en vue du calcul différentiel. L'étude de la continuité d'une fonction n'est pas un objectif du programme." Ainsi je vous propose plutôt d'interroger les élèves sur des problèmes concrets, par exemple d'optimisation, le but principal étant de s'entraîner à dériver des fonctions composées.

- Notions de topologie pour la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^2$: boule ouverte, boule fermée, sphère, ouvert, fermé, adhérence, intérieur, frontière.
- Fonction de deux variables, applications partielles, représentations (graphe et courbes de niveaux)
- Continuité, dérivées partielles, classe C^1. Les fonctions construites à partir de fonctions polynomiales ou usuelles sont de classe C^1 sur leur domaine de définition.
- Formule de Taylor à l'ordre 1 (admise) pour une fonction de classe C^1. Équation du plan tangent au graphe.
- Dériver des composées, tout particulièrement :
  - dériver la valeur d'une fonction le long d'un chemin, lien avec les courbes de niveau.
  - dériver $\phi \circ f$ pour $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
  - dériver $f \circ (\phi, \psi)$ avec $f, \phi, \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
- Définition d'extremum global, local, strict.
- Une fonction continue sur un fermé bornée est bornée et atteint ses bornes (admis).
- Notion de point critique pour les fonctions de classe C^1.
- Condition nécessaire d'optimalité pour les fonctions de classe C^1 (point critique).
- ⚠pas de dérivée seconde pour cette année !!

Reprise du programme précédent (optionnel) :

Espaces euclidiens

- Définition d'un produit scalaire, de la norme euclidienne associée.
- Exemples de produits scalaires canoniques, ou usuels, ou non, sur $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[X]$, $C^0([0,1],\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_n[X]$, $\ell^2(\mathbb{N})$.
- Identité remarquable, inégalité de Cauchy-Schwarz, propriétés de la norme euclidienne (positivité, séparation, absolue homogénéité, inégalité triangulaire).
- Notion de famille orthogonale, orthonormée.
- Calcul, dans une base orthonormée, des coordonnées, du produit scalaire, de la norme.
- Algorithme de Gram-Schmidt (énoncé avec l'unicité, la preuve de l'unicité seulement esquissée). Existence de bases orthonormées pour un espace euclidien.
- Notion d'orthogonalité pour deux vecteurs ou deux parties de E. Une somme de deux sev orthogonaux est directe.
- Notion d'orthogonal d'un vecteur ou d'une partie de E. Stabilité par CL de l'orthogonal.
- Projection orthogonale sur un sev de dimension finie. Notion de supplémentaire orthogonal. Dimension de l'orthogonal, si l'espace ambiant est de dimension finie.
- Théorème de la base orthonormée incomplète.
- Distance d'un vecteur à un sev F de dimension finie. Caractérisation du projeté orthogonal sur F comme unique vecteur de F réalisant cette distance.

Ce que le programme ne contient <u>pas</u> :

- la notion de matrice orthogonale ou d'endomorphisme orthogonal (on a remarqué que l'inverse de la matrice de passage entre deux bases orthonormées est sa transposée, mais c'est plutôt au programme de 2e année),
- la notion d'adjoint d'un endomorphisme,
- la notion de codimension,
- des structures hermitiennes.

Dernière colle de l'année !