

Colle n°29

Semaine du 08/06/2026

Ce que le programme contient :

VARIABLES ALÉATOIRES

Reprise du programme précédent

ESPACES EUCLIDIENS

- ★ Définition d'un produit scalaire, de la norme euclidienne associée.
- ★ Exemples de produits scalaires canoniques, ou usuels, ou non, sur \mathbb{R}^n , $\mathbb{R}[X]$, $C^0([0, 1], \mathbb{R})$, $\mathbb{R}_n[X]$, $\ell^2(\mathbb{N})$.
- ★ Identité remarquable, inégalité de Cauchy-Schwarz, propriétés de la norme euclidienne (positivité, séparation, absolue homogénéité, inégalité triangulaire).
- ★ Notion de famille orthogonale, orthonormée.
- ★ Calcul, dans une base orthonormée, des coordonnées, du produit scalaire, de la norme.
- ★ Algorithme de Gram-Schmidt (énoncé avec l'unicité, la preuve de l'unicité seulement esquissée). Existence de bases orthonormées pour un espace euclidien.
- ★ Notion d'orthogonalité pour deux vecteurs ou deux parties de E . Une somme de deux sev orthogonaux est directe.
- ★ Notion d'orthogonal d'un vecteur ou d'une partie de E . Stabilité par CL de l'orthogonal.
- ★ Projection orthogonale sur un sev de dimension finie. Notion de supplémentaire orthogonal. Dimension de l'orthogonal, si l'espace ambiant est de dimension finie.
- ★ Théorème de la base orthonormée incomplète.
- ★ Distance d'un vecteur à un sev F de dimension finie. Caractérisation du projeté orthogonal sur F comme unique vecteur de F réalisant cette distance.

Ce que le programme ne contient pas :

- ★ la notion de matrice orthogonale ou d'endomorphisme orthogonal (on a remarqué que l'inverse de la matrice de passage entre deux bases orthonormées est sa transposée, mais c'est plutôt au programme de 2e année),
- ★ la notion d'adjoint d'un endomorphisme,
- ★ la notion de codimension,
- ★ des structures hermitiennes.

Questions de cours possibles.

- ★ Montrer que $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
- ★ Démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, avec cas d'égalité.
- ★ Démonstration de l'inégalité triangulaire, avec cas d'égalité.
- ★ Appliquer l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt sur un exemple pas trop calculatoire.
- ★ Montrer qu'une famille orthogonale de vecteurs tous non nuls est libre.