Colle n°27

Semaine du 25/05/2026

Ce que le programme contient :

MATRICES D'APPLICATIONS LINÉAIRES

- ⋆ Application linéaire canoniquement associée à une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- ⋆ Rang d'une matrice défini comme rang de ses vecteurs colonnes ou de l'application linéaire associée. Calcul du rang avec le pivot de Gauss. La transposée conserve le rang (démonstration vue mais non exigible).
- ⋆ Représentation en colonne des coordonnées d'un vecteur dans une base. Cela définit un isomorphisme de l'ev dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, qui préserve les structures linéaires (indépendance, rang...)
- ⋆ Matrice de changement de bases, et son inverse.
- ⋆ Représentation matricielle d'une application linéaire dans des bases. Isomorphisme entre applications linéaires et espace de matrices de taille correspondante, dimension de $\mathcal{L}(E, F)$.
- ⋆ Lien entre composition d'applications et produit matriciel, calcul d'image et produit par une colonne.
- ⋆ Le rang d'une application est égal au rang de sa matrice dans n'importe quelles bases.
- ⋆ Cas des endomorphismes : puissances et polynômes d'un endomorphisme (et de la matrice carrée associée).
- ⋆ Un endomorphisme est bijectif ssi sa représentation matricielle dans n'importe quelle base l'est.
- ⋆ Matrices semblables.
- ⋆ Base adaptée à un endomorphisme : cas des projecteurs.

⚠Notations choisies (j'ai changé par rapport à l'année dernière) :

- ⋆ on a noté $[v]_{\mathcal{B}} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ le vecteur des coordonnées d'un vecteur v dans une base $\mathcal{B}$ de cardinal n,
- ⋆ on a noté $[f]_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\mathcal{B}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la représentation matricielle d'une application linéaire f avec $\mathcal{B}$ comme base de l'espace de départ (de dimension p) et $\tilde{\mathcal{B}}$ comme base de l'espace d'arrivée (de dimension n), et $[f]_{\mathcal{B}}$ pour un endomorphisme avec la même base au départ et à l'arrivée,
- ⋆ on a noté $[\tilde{\mathcal{B}}]_{\mathcal{B}}$ la matrice de passage de B (ancienne base) "vers" $\tilde{\mathcal{B}}$ (nouvelle base), de sorte que pour un vecteur v la formule de changement de bases s'écrit : $[v]_{\mathcal{B}} = [\tilde{\mathcal{B}}]_{\mathcal{B}}[v]_{\tilde{\mathcal{B}}}$.

DÉTERMINANTS

NB : le but est d'atteindre une aisance dans les calculs de déterminant plus qu'une compréhension profonde de la notion, ce que le programme ne permet de toutes façons pas.

- ⋆ Interprétation géométrique du déterminant en dimension 2 et 3, comme aire ou volume orienté du parallélogramme ou parallélépipède associé aux vecteurs.
- ⋆ Déterminant d'une matrice, défini comme l'unique application linéaire par rapport à chaque colonne, antisymétrique par rapport aux colonnes, et valant 1 pour I_n. L'existence et l'unicité sont admises.
- ⋆ Propriétés immédiates du déterminant (nul si une colonne est nulle ou si deux colonnes sont égales, $\det \lambda M = \lambda^n M$ si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.)
- ⋆ Propriété multiplicative du déterminant. Le déterminant est non nul si et seulement si la matrice est inversible. Déterminant de l'inverse. Deux matrices semblables ont même déterminant.
- ⋆ Déterminant d'une matrice triangulaire supérieure et diagonale.
- ⋆ Développement par rapport à une ligne ou une colonne (admis).
- ⋆ Formules de Cramer.
- ⋆ Déterminant d'un endomorphisme (il ne dépend pas de la base), propriétés (caractérisation de l'inversibilité, déterminant d'une composée).
- ⋆ Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base. Caractérisation de la liberté. Changement de bases.

Ce que le programme ne contient pas :

- ⋆ la caractérisation du déterminant en terme de permutations (la signature n'est pas au programme)
- ⋆ des questions théoriques sur le déterminant (la notion d'application multilinéaire n'est pas au programme)
- ⋆ le vocabulaire propre (!) à la diagonalisation.

Questions de cours possibles.

- ⋆ Montrer la formule de changement de bases pour un vecteur, et que l'inverse d'une matrice de passage et la matrice du passage inverse.
- ⋆ Montrer que le rang d'une application linéaire est égal au rang de sa matrice dans n'importe quelles bases.
- ⋆ Calcul du rang et/ou du déterminant d'une matrice explicite (pour le déterminant, méthode au choix : règle de Sarrus, pivot, développement par rapport à une ligne ou colonne, ou combinaison !).
- ⋆ Démonstration des formules de Cramer.
- ⋆ Démontrer l'invariance du déterminant par transposition, en s'appuyant sur les matrices des opérations élémentaires (transvection, dilatation, permutation).
- ⋆ Démontrer que le déterminant d'un endomorphisme ne dépend pas du choix de la base considérée.