

Colle n°6

Semaine du 02/11/2026

Ce que le programme contient :

NOMBRES COMPLEXES

- ★ Calcul algébrique dans $\mathbb{C}$ (binôme de Newton, somme géométrique, factorisation de $a^n - b^n$..), linéarité de la partie réelle/imaginaire. Représentation géométrique dans $\mathbb{C}$.
- ★ Cercle trigonométrique, exponentielle complexe, forme exponentielle d'un nombre complexe. Formules d'Euler, factorisation par l'arc moitié.
- ★ Racines carrées d'un nombre complexe, sous forme exponentielle ou algébrique.
- ★ Polynômes du second degré à coefficients complexes : discriminant, racine, forme factorisée. Cas d'un polynôme réel au discriminant strictement négatif.
- ★ Application à la résolution d'un système somme-produit.
- ★ Application à la détermination du terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2, dans tous les cas (racines distinctes, racine double, forme trigonométrique dans le cas d'une suite réelle avec racines complexes conjuguées).
- ★ Racines n -ièmes de l'unité : forme générale, somme des racines. Application à la détermination des racines n -ièmes d'un nombre complexe sous forme exponentielle.

 Le TD sur les équations différentielles n'aura lieu que mercredi ; pour l'instant on pourra interroger sur une résolution sans difficulté particulière, faisant intervenir au moins un calcul de primitives.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE 1

Objet d'étude : $y' + ay = b$ avec $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ des fonctions continues, $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ l'inconnue, supposée dérivable, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- ★ Vocabulaire des équations différentielles : forme résolue, linéaire, second membre, équation homogène associée.
- ★ Structure des solutions pour une équation différentielle linéaire : si y_p est une solution particulière et S_h l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée, $S = \{y_p + y_h ; y_h \in S_h\}$.
- ★ À l'ordre 1, détermination de S_h à l'aide d'une primitive de a .
- ★ Recherche d'une solution particulière : recherche sous forme particulière (second terme constant, polynomial, exponentiel ou sinusoidal ; sans chercher trop de raffinement) ou plus systématique **méthode de la variation de la constante**. Principe de superposition en cas de second membre donné comme une somme.
- ★ Conclusion : l'ensemble des solutions est une droite affine, mise en forme précise du résultat.
- ★ Application à la résolution d'un problème de Cauchy (détermination de la constante à l'aide de la donnée initiale). Existence et unicité d'une solution pour tout problème de Cauchy linéaire d'ordre 1, interprétation graphique.

Ce que le programme ne contient pas (encore !) :

- ★ des considérations géométriques avec les nombres complexes, laissées de côté pour l'instant,
- ★ des équations différentielles d'ordre 2.

Questions de cours possibles.

- ★ Inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$, avec le cas d'égalité.
- ★ Déterminer le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 sur un exemple.
- ★ Forme des racines n -ièmes de l'unité (avec démonstration).
- ★ Forme de la solution d'une équation linéaire homogène d'ordre 1 (avec démonstration).
- ★ Exemple : résolution de $y' + ty = t^3$ sur $\mathbb{R}$.