

Polynômes : Polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, somme, produit, composée. Degré, coefficient dominant. Degré d'une somme et d'un produit. Fonction polynomiale associée à un polynôme. Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, division euclidienne. Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$: dérivation formelle, linéarité, dérivée d'un produit, dérivée k -ième, formule de Taylor. Racine d'un polynôme. Caractérisation en termes de divisibilité. Multiplicité, caractérisation par les dérivées successives. Polynôme scindé sur $\mathbb{K}$, relations coefficients-racines (ne concernent que la somme et le produit). Polynômes irréductibles. Théorème de D'Alembert-Gauss. Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, de $\mathbb{R}[X]$ et décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

A - Questions de cours :

1. Soit P, Q deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Que peut-on dire du degré des polynômes λP , $P + Q$ et PQ en fonction des degrés des polynômes P et Q ? Donner une condition suffisante pour avoir l'égalité pour le degré de $P + Q$.
2. Énoncer le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.
3. Énoncer la caractérisation des racines en terme de divisibilité.
4. Définir la notion de polynôme dérivé. Quand a-t-on $\deg(P') = \deg(P) - 1$?
5. Définir la notion de racine multiple. Énoncer la caractérisation de la multiplicité en fonction des polynômes dérivés successifs.
6. Que peut-on dire du nombre de racines complexes d'un polynôme non nul ? En déduire une méthode pour prouver qu'un polynôme est nul.
7. Énoncer la formule de Taylor.
8. Énoncer la formule de Leibniz.
9. Énoncer le théorème de D'Alembert-Gauss. Que peut-on en déduire ?
10. Définir la notion de polynômes irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$. Donner les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, et les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
11. Définir la notion de polynôme scindé sur $\mathbb{K}$. Énoncer les relations liant les coefficients d'un polynôme scindé avec la somme et le produit de ses racines.
12. Si P est un polynôme à coefficients réels et si α est une racine complexe non réelle de P , que peut-on en déduire ?

B - Savoir-faire

1. Effectuer la division euclidienne de deux polynômes donnés par le colleur.
2. Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ et a un élément de $\mathbb{K}$. Montrer que P a pour reste $P(a)$ dans la division euclidienne par $X - a$.
3. Montrer que $P = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} X^k$ n'a que des racines simples.
4. Déterminer la somme et le produit des racines n -ièmes de l'unité.
5. Donner la factorisation en produit de polynômes irréductibles et unitaires dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ d'un polynôme du type $aX^n + b$ donné par le colleur.

C - une question de cours ou un savoir-faire d'un des programmes précédents