Colle 11 : quinzaine du 1er au 14 avril

Fonctions d'une variable réelle : dérivabilité. Dérivabilité en un point, nombre dérivé. Dérivabilité à gauche, à droite. Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1. La dérivabilité entraîne la continuité.
Dérivabilité sur un intervalle. Opérations sur les fonctions dérivables en un point ou sur un intervalle : combinaison linéaire, produit, quotient, composée, réciproque.
Propriétés des fonctions dérivables : condition nécessaire d'extremum en un point intérieur. Théorème de Rolle. Égalité des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis : toute fonction dérivable sur un intervalle dont la dérivée est bornée est lipschitzienne.
Caractérisation des fonctions constantes, croissantes, strictement croissantes parmi les fonctions dérivables.
Théorème de limite de la dérivée.
Fonctions de classe C^k. Opérations sur les fonctions de classe C^k : combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque.
Fonctions convexes : position du graphe par rapport à une corde ou une tangente (si la fonction est dérivable). Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.
Cas des fonctions à valeurs complexes.

A - Questions de cours :

1. Donner la définition de les notions de dérivabilité en un point et de nombre dérivé.
2. Énoncer le lien entre la dérivabilité en un point et l'existence d'un développement limité à l'ordre 1 en ce point.
3. Énoncer la condition nécessaire d'extremum en un point intérieur. Énoncer le théorème de Rolle.
4. Énoncer l'égalité des accroissements finis.
5. Donner la définition de la notion de fonction lipschitzienne. Énoncer l'inégalité des accroissements finis.
6. Énoncer la formule de Leibniz.
7. Définir la notion de fonction convexe.
8. Donner la position de la courbe représentative d'une fonction convexe par rapport à ses cordes. La traduire en une inégalité portant sur la fonction.
9. Donner la position de la courbe représentative d'une fonction convexe par rapport à ses tangentes. La traduire en une inégalité portant sur la fonction.
10. Donner la caractérisation d'une fonction convexe parmi les fonctions dérivables. Donner la caractérisation d'une fonction convexe parmi les fonctions deux fois dérivables.

B - Savoir-faire

1. Calculer les dérivées successives d'une fonction du type produit d'une fonction polynomiale et d'une exponentielle, données par le colleur.
2. Calculer les dérivées successives d'une fonction du type $x \mapsto \cos(\alpha x)\,\mathrm{e}^{\omega x}$ ou $x \mapsto \sin(\alpha x)\,\mathrm{e}^{\omega x}$ donnée par le colleur.
3. Montrer que $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$.
4. Donner le développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$. En déduire la limite de la suite de terme général $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.
5. Montrer que $f \colon x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ possède un unique point fixe. Montrer que f est lipschitzienne de rapport $\frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}^+$.
6. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \mathrm{e}^{-\frac{u_n}{2}}$. Montrer que u est convergente en prouvant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}$, où α est l'unique point fixe de la fonction f de la question 5.

C - une question de cours ou un savoir-faire d'un des programmes précédents