**Corrigé des exercices sur les espaces vectoriels**

31. Procédons par double implication.
Supposons que $v \circ u = 0$. Montrons que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$.
Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$. Alors il existe $a \in E$ tel que $x = u(a)$. On a alors $v(x) = v(u(a)) = (v \circ u)(a) = 0_E$ car $v \circ u = 0$. Ainsi, $x \in \mathrm{Ker}(v)$, ce qui montre que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$.
Réciproquement, supposons que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$.
Soit $x \in E$. Alors $(v \circ u)(x) = v(u(x))$. Or, $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$, donc $u(x) \in \mathrm{Ker}(v)$ d'après l'hypothèse. Donc $v(u(x)) = 0_E$. Finalement, $(v \circ u)(x) = 0_E$ pour tout $x \in E$, ce qui montre que $v \circ u = 0$.
Par double implication, nous avons prouvé que $v \circ u = 0$ si et seulement si $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$.

---

32. Supposons que $u$ et $v$ commutent. Montrons que $v(\mathrm{Im}(u)) \subset \mathrm{Im}(u)$.
Soit $x \in v(\mathrm{Im}(u))$ : il existe $a \in \mathrm{Im}(u)$ tel que $x = v(a)$. Puisque $a \in \mathrm{Im}(u)$, il existe $b \in E$ tel que $a = u(b)$. Ainsi, $x = v(a) = v(u(b))$. Or $u \circ v = v \circ u$, par conséquent $x = u(v(b))$, ce qui montre que $x \in \mathrm{Im}(u)$.
On a donc prouvé que $v(\mathrm{Im}(u)) \subset \mathrm{Im}(u)$ : $\mathrm{Im}(u)$ est stable par $v$.
Montrons maintenant que $v(\mathrm{Ker}(u)) \subset \mathrm{Ker}(u)$.
Soit $x \in v(\mathrm{Ker}(u))$. Alors il existe $a \in \mathrm{Ker}(u)$ tel que $x = v(a)$. Alors $u(x) = u(v(a)) = v(u(a))$ car $u \circ v = v \circ u$.
Or, $a \in \mathrm{Ker}(u)$, donc $u(a) = 0_E$. Ainsi, $u(x) = v(0_E) = 0_E$, ce qui montre que $x \in \mathrm{Ker}(u)$.
On a donc prouvé que $v(\mathrm{Ker}(u)) \subset \mathrm{Ker}(u)$ : $\mathrm{Ker}(u)$ est stable par $v$.

---

33. (a) Remarquons tout d'abord que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, car c'est le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $(1, 1, 0)$. Par ailleurs, remarquons que :

$$G = \{(x, y, 3x + 2y) \,|\, x, y, z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\{(1, 0, 3), (0, 1, 2)\}$$

ce qui montre que $G$ est lui aussi un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Procédons par analyse et synthèse.
Analyse : soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Supposons qu'il existe $v \in G$ et $w \in F$ tels que $u = v + w$.

- $v \in G$, donc il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $v = (a, b, c)$ et $3a + 2b - c = 0$.
- $w \in F$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $w = \lambda \cdot (1, 1, 0)$.
- $u = v + w$ donc $\begin{cases} x = a + \lambda \\ y = b + \lambda \\ z = c \end{cases}$

On a donc $a = x - \lambda$, $b = y - \lambda$ et $c = z$. Puisque $3a + 2b - c = 0$, alors $3x - 3\lambda + 2y - 2\lambda - z = 0$, donc $\lambda = \frac{3x+2y-z}{5}$. Ainsi, si $v$ et $w$ existent, alors

$$v = \left(\frac{2x - 2y + z}{5}, \frac{-3x + 3y + z}{5}, z\right) \qquad w = \frac{3x + 2y - z}{5} \cdot (1, 1, 0)$$

ce qui prouve l'unicité du couple $(v, w)$ s'il existe.
Synthèse : considérons les vecteurs $v$ et $w$ définis par :

$$v = \left(\frac{2x - 2y + z}{5}, \frac{-3x + 3y + z}{5}, z\right) \qquad w = \frac{3x + 2y - z}{5} \cdot (1, 1, 0)$$

alors :

- $w \in F$.
- $v + w = (x, y, z) = u$.
- $v \in G$ car $3\frac{2x-2y+z}{5} + 2\frac{-3x+3y+z}{5} - z = \frac{(6-6)x+(-6+6)y+5z}{5} - z = 0$.

ce qui montre l'existence d'un couple $(v, w) \in G \times F$ tel que $u = v + w$.
Par analyse et synthèse, on a donc montré que pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^3$, il existe un unique couple $(v, w) \in G \times F$ tel que $u = v + w$, ce qui signifie que $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

(b) La projection $p$ sur $G$ de direction $F$ est l'application de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même qui à $u = v + w$ ($v \in G$, $w \in F$) associe $v$. Ainsi :

$$\begin{array}{rccl} p\colon & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \mapsto & \left(\frac{2x-2y+z}{5}, \frac{-3x+3y+z}{5}, z\right) \end{array}$$

La symétrie par rapport à $F$ de direction $G$ est l'application de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même qui à $u = v+w$ ($v \in G$, $w \in F$) associe $-v + w$. Ainsi :

$$\begin{array}{rccl} s\colon & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \mapsto & \left(\frac{x+4y-2z}{5}, \frac{6x-y-2z}{5}, -z\right) \end{array}$$

34. (a) On vérifie que $u$ est linéaire. Puisque $u$ va de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même, c'est alors un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
Déterminons $u\circ u$ :
Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}u(u(x,y,z)) &= u\big(\frac{1}{3}(x+2y,4x-y,-2x+2y+3z)\big) = \frac{1}{3}u(x+2y,4x-y,-2x+2y+3z)\\ &= \frac{1}{9}(x+2y+2(4x-y),4(x+2y)-(4x-y),-2(x+2y)+2(4x-y)+3(-2x+2y+3z))\\ &= \frac{1}{9}(9x+(2-2)y,(4-4)x+9y,(-2+8-6)x+(-4-2+6)y+9z)\\ &= (x,y,z)\end{aligned}$$

ce qui montre que $u\circ u=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$. Ces deux points montrent que $u$ est une symétrie.

(b) D'après le cours, puisque $u\circ u=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$, alors $u$ est bijective de réciproque $u^{-1}=u$. $u$ est donc un endomorphisme bijectif de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire un automorphisme de $\mathbb{R}^3$, et son application réciproque est $u$.

---

35. (a) Vérifions que $p$ est linéaire. Soit $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}p(z_1+\lambda z_2) &= \overline{z_1+\lambda z_2}-j(z_1+\lambda z_2)\\ &= \overline{z_1}-jz_1+\overline{\lambda}\,\overline{z_2}-\lambda j z_2\\ &= p(z_1)+\lambda p(z_2)\end{aligned}$$

car $\lambda\in\mathbb{R}$ donc $\overline{\lambda}=\lambda$. L'application $p$ est linéaire de $\mathbb{C}$ dans lui-même : c'est un endomorphisme de $\mathbb{C}$.

(b) Déterminons $p\circ p$. Soit $z\in\mathbb{C}$.

$$p(p(z))=p(\overline{z}-jz)=\overline{\overline{z}-jz}-j(\overline{z}-jz)=z-\overline{j}\overline{z}-j\overline{z}+j^2z=(1+j^2)z-2\,\mathrm{Re}(j)\overline{z}$$

Or $j=\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$, donc $-2\,\mathrm{Re}(j)=1$, et $1+j^2=1+\mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{3}}=\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}\cos(\frac{2\pi}{3})=-j$. Ainsi :

$$(p\circ p)(z)=\overline{z}-jz=p(z)$$

ce qui montre que $p\circ p=p$. Puisque $p$ est un endomorphisme de $\mathbb{C}$ vérifiant $p\circ p=p$, alors $p$ est un projecteur.
Déterminons $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$. Soit $z\in\mathbb{C}$.

$$z\in\mathrm{Ker}(p)\iff p(z)=0\iff \overline{z}-jz=0$$

Posons $z=a+ib$, où $a=\mathrm{Re}(z)$ et $b=\mathrm{Im}(z)$. Alors :

$$\begin{aligned}z\in\mathrm{Ker}(p) &\iff a-ib-\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(a+ib)=0\iff \frac{3}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b-i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b\right)=0\\ &\iff \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}a+b)-\frac{1}{2}i(\sqrt{3}a+b)=0\iff \sqrt{3}a+b=0\end{aligned}$$

Ainsi, $z\in\mathrm{Ker}(p)$ si et seulement si $z=a-i\sqrt{3}a$, avec $a\in\mathbb{R}$, ce qui montre que $\mathrm{Ker}(p)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\{1-i\sqrt{3}\}$.
Par ailleurs, $p$ étant un projecteur, on sait que $\mathrm{Im}(p)=\mathrm{Ker}(p-\mathrm{id})$. Ainsi, pour $z\in\mathbb{C}$ :

$$z\in\mathrm{Im}(p)\iff p(z)-z=0\iff \overline{z}-(1+j)z=0$$

En posant $z=a+ib$, avec $a,b\in\mathbb{R}$, on obtient alors, de même que précédemment :

$$z\in\mathrm{Im}(p)\iff a+\sqrt{3}b=0\iff z=-b\sqrt{3}+ib$$

ce qui montre que $\mathrm{Im}(p)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\{-\sqrt{3}+i\}$.

---

36. Soit $P$, $Q\in\mathbb{R}[X]$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors :

$$\varphi(P+\lambda Q)=(P+\lambda Q)(1)X^2=(P(1)+\lambda Q(1))X^2=P(1)X^2+\lambda Q(1)X^2=\varphi(P)+\lambda\varphi(Q)$$

ce qui montre que $\varphi$ est linéaire. Puisque $\varphi$ est définie de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même, c'est alors un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Déterminons maintenant $\varphi\circ\varphi$. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. Notons $Q=\varphi(P)$. Alors :

$$\varphi\circ\varphi(P)=\varphi(Q)=Q(1)X^2$$

avec $Q = \varphi(P) = P(1)X^2$, donc $Q(1) = P(1) \times 1^2 = P(1)$. Finalement $\varphi \circ \varphi(P) = P(1)X^2 = \varphi(P)$, ce qui montre que $\varphi \circ \varphi = \varphi$.
$\varphi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $\varphi^2 = \varphi$ : $\varphi$ est donc un projecteur ; c'est la projection sur $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(\varphi)$. Déterminons $\mathrm{Ker}(\varphi)$ :
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

$$P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \iff \varphi(P) = 0 \iff P(1)X^2 = 0 \iff P(1) = 0$$

Ainsi $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = 0\}$.
Déterminons maintenant $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{id})$. Puisque $\varphi$ est un projecteur, on sait que $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{id}) = \mathrm{Im}(\varphi)$.
Soit $P \in \mathrm{Im}(\varphi)$. Alors il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = \varphi(Q)$, c'est-à-dire $P = Q(1)X^2$. Finalement, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P = aX^2$. Ainsi, $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{Vect}(X^2)$.
Par ailleurs, $\varphi(X^2) = 1^2X^2 = X^2$, ce qui montre que $X^2 \in \mathrm{Im}(\varphi)$. Puisque $\mathrm{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ qui contient $X^2$, alors $\mathrm{Vect}(X^2) \subset \mathrm{Im}(\varphi)$.
Finalement, par double inclusion, on a prouvé que $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(X^2)$, et par conséquent $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}(X^2)$.

Soit $f$, $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $h = f + \lambda g$. Alors, pour tout réel $x$ :

$$\begin{aligned}\psi(f+\lambda g)(x) &= (h(1)-h(0))x + h(0) = (f(1) + \lambda g(1) - f(0) - \lambda g(0))x + f(0) + \lambda g(0)\\ &= (f(1)-f(0))x + \lambda(g(1)-g(0))x + f(0) + \lambda g(0)\\ &= (f(1)-f(0))x + f(0) + \lambda\big((g(1)-g(0))x + g(0)\big)\\ &= \psi(f)(x) + \lambda\psi(g)(x)\end{aligned}$$

ce qui montre que $\psi(f + \lambda g) = \psi(f) + \lambda\psi(g)$ : $\psi$ est linéaire. Puisque $\psi$ est définie de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dans lui-même, $\psi$ est alors un endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Déterminons maintenant $\psi^2$ :
Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Notons $g = \psi(f)$. Alors pour tout réel $x$ :

$$\psi^2(f)(x) = \psi(g)(x) = (g(1) - g(0))x + g(0)$$

avec $g(x) = (f(1) - f(0))x + f(0)$, donc $g(0) = f(0)$ et $g(1) = f(1) - f(0) + f(0) = f(1)$. Finalement :

$$\psi^2(f)(x) = (f(1) - f(0))x + f(0) = \psi(f)(x)$$

ce qui montre que $\psi^2(f) = \psi(f)$. Ceci est vérifié pour tout $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, ce qui montre que $\psi^2 = \psi$. $\psi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ vérifiant $\psi^2 = \psi$, c'est donc un projecteur. Déterminons $\mathrm{Ker}\,\psi$ :
Soit $f \in \mathrm{Ker}(\psi)$. Alors $\psi(f) = 0$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f(1) - f(0))x + f(0) = 0$. En particulier, en prenant $x = 0$, on obtient $f(0) = 0$, et en prenant $x = 1$, on obtient $f(1) = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(\psi) \subset \big\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(1) = 0 \text{ et } f(0) = 0\big\}$.
Réciproquement, soit $f \in \big\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(1) = 0 \text{ et } f(0) = 0\big\}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi(f)(x) = (f(1)-f(0))x + f(0) = 0$ car $f(1) = f(0) = 0$.
Finalement, par double inclusion, on a prouvé :

$$\mathrm{Ker}(\psi) = \big\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(1) = 0 \text{ et } f(0) = 0\big\}$$

Déterminons désormais $\mathrm{Ker}(\psi - \mathrm{id})$.
Soit $f \in \mathrm{Ker}(\psi - \mathrm{id})$. Alors $\psi(f) - f = 0$, donc $f = \psi(f)$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (f(1) - f(0))x + f(0)$$

Posons $a = f(1) - f(0)$ et $b = f(0)$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$. Donc $f = a\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}} + b$. On a donc montré :

$$\mathrm{Ker}(\psi - \mathrm{id}) \subset \mathrm{Vect}\{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}, x \mapsto 1\}$$

Réciproquement, vérifions que $\mathrm{id} \in \mathrm{Ker}(\psi - \mathrm{id})$ et $x \mapsto 1 \in \mathrm{Ker}(\psi - \mathrm{id})$ :
Posons $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$(\psi - \mathrm{id})(f)(x) = \psi(f)(x) - f(x) = (f(1) - f(0))x + f(0) - f(x) = (1-0)x + 0 - x = x - x = 0$$

ce qui montre que $(\psi - \mathrm{id})(f) = 0$, donc $f \in \mathrm{Ker}(\psi - \mathrm{id})$.
Posons maintenant $f\colon x \mapsto 1$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$(\psi - \mathrm{id})(f)(x) = \psi(f)(x) - f(x) = (f(1) - f(0))x + f(0) - f(x) = (1-1)x + 1 - 1 = 0$$

ce qui montre que $(\psi - \mathrm{id})(f) = 0$, donc $f \in \mathrm{Ker}(\psi - \mathrm{id})$.
Par ailleurs, $\psi - \mathrm{id}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, donc $\mathrm{Ker}(\psi - \mathrm{id})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Puisqu'il

contient $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ et $x \mapsto 1$, alors il contient le sous-espace vectoriel engendré par ces deux vecteurs.
Finalement, par double inclusion, on a prouvé :

$$\mathrm{Ker}(\psi - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\{x \mapsto x, x \mapsto 1\}$$

---

37. (a) $y \in \mathrm{Vect}\{x\}$, donc il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $y = \alpha x$. Puisque $h$ est linéaire, alors $h(y) = \alpha h(x)$. Or, par hypothèse, il existe $\lambda_x$ et $\lambda_y$ tels que $h(y) = \lambda_y y$ et $h(x) = \lambda_x x$. On a donc

$$\begin{aligned} \lambda_y y &= \alpha \cdot (\lambda_x x) \\ &= \lambda_x \cdot (\alpha x) \\ &= \lambda_x y \end{aligned}$$

Ainsi, $y = 0_E$ ou alors $\lambda_x = \lambda_y$. Puisque par hypothèse, $y \neq 0_E$, alors $\lambda_y = \lambda_x$.

(b) $h$ étant linéaire, $h(x+y) = h(x) + h(y)$. Ainsi $\lambda_{x+y} \cdot (x+y) = \lambda_x \cdot x + \lambda_y \cdot y$. On en déduit donc :

$$(\lambda_y - \lambda_{x+y}) \cdot y = (\lambda_{x+y} - \lambda_x) \cdot x$$

Si $\lambda_y - \lambda_{x+y} \neq 0$, alors l'égalité ci-dessus montre que $y \in \mathrm{Vect}\{x\}$, ce qui est absurde. Donc $\lambda_y - \lambda_{x+y} = 0$, et donc $0_E = (\lambda_{x+y} - \lambda_x) \cdot x$, donc $\lambda_{x+y} - \lambda_x = 0$ car $x \neq 0_E$. Finalement, on a prouvé que $\lambda_y = \lambda_{x+y} = \lambda_x$.

(c) On vient de montrer que pour tout $y \in E \setminus \{0_E\}$, $\lambda_y = \lambda_x$. Notons $\lambda = \lambda_x$. On a donc pour tout $y \in E \setminus \{0_E\}$, $h(y) = \lambda y$, ou encore $(h - \lambda\,\mathrm{id}_E)(y) = 0_E$, ce qui montre que $E \setminus \{0_E\} \subset \mathrm{Ker}(h - \lambda\,\mathrm{id}_E)$. Puisque $h$ et $\mathrm{id}_E$ sont des endomorphismes de $E$, alors $h - \lambda\,\mathrm{id}_E$ aussi, donc $\mathrm{Ker}(h - \lambda\,\mathrm{id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de $E$. En particulier, $0_E \in \mathrm{Ker}(h - \lambda\,\mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(h - \lambda\,\mathrm{id}_E) \subset E$. Finalement, par double inclusion, $E = \mathrm{Ker}(h - \lambda\,\mathrm{id}_E)$, ce qui montre que $h = \lambda\,\mathrm{id}_E$.

---

38. Soit $u$, $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Notons $w = u + \lambda v$. Alors :

$$\begin{aligned} \varphi(u + \lambda v) = \varphi(w) &= (w_{n+2} - 5w_{n+1} + 6w_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= (u_{n+2} + \lambda v_{n+2} - 5(u_{n+1} + \lambda v_{n+1}) + 6(u_n + \lambda v_n))_{n\in\mathbb{N}} \\ &= (u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n + \lambda(v_{n+2} - 5v_{n+1} + 6v_n))_{n\in\mathbb{N}} \\ &= (u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda(v_{n+2} - 5v_{n+1} + 6v_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= \varphi(u) + \lambda\varphi(v) \end{aligned}$$

ce qu montre que $\varphi$ est linéaire. Puisque $\varphi$ est définie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans lui-même, c'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Remarquons que $E = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\, \varphi(u) = (4)_{n\in\mathbb{N}}\right\}$.
Puisque $\varphi$ est linéaire, on sait que les solutions de l'équation $\varphi(u) = (4)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les suites qui s'écrivent comme la somme d'une solution particulière et d'un élément de $\mathrm{Ker}\,\varphi$.

Notons $a$ la suite constante de terme général 2. Alors $\varphi(a) = (2 - 10 + 12)_{n\in\mathbb{N}} = (4)_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi $a \in E$ : $a$ est une solution particulière de l'équation $\varphi(u) = (4)_{n\in\mathbb{N}}$.
Déterminons désormais $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

$$u \in \mathrm{Ker}\,\varphi \iff \varphi(u) = (0)_{n\in\mathbb{N}} \iff \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0$$

Le polynôme caractéristique associé est $X^2 - 5X + 6$ de racines 2 et 3. Ainsi :

$$\begin{aligned} u \in \mathrm{Ker}\,\varphi &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\, u = (\lambda \times 2^n + \mu \times 3^n)_{n\in\mathbb{N}} \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}\, u = \lambda(2^n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu(3^n)_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

ce qui montre que $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Vect}\{(2^n)_{n\in\mathbb{N}}, (3^n)_{n\in\mathbb{N}}\}$. Finalement :

$$E = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\, \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R},\, \forall n \in \mathbb{N}\, u = 4 + \lambda \times 2^n + \mu \times 3^n\right\}$$

De même, on remarque que $F$ est l'ensemble des solutions de l'équation $\varphi(u) = (12(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Notons $b$ la suite de terme général $(-1)^n$. Calculons $c = \varphi(b)$ : son terme général est :

$$c_n = b_{n+2} - 5b_{n+1} + 6b_n = (-1)^{n+2} - 5(-1)^{n+1} + 6(-1)^n = (-1)^n\big((-1)^2 - 5(-1) + 6\big) = 12 \times (-1)^n$$

Ainsi, $b$ est une solution particulière de l'équation $\varphi(u) = (12(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ : $b \in F$. Finalement :

$$F = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\, \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R},\, \forall n \in \mathbb{N},\, u_n = (-1)^n + \lambda \times 2^n + \mu \times 3^n\right\}$$

---