TD espaces vectoriels.

Exercice 21.

a) On remarque que $a(0,0,0) = (0,-1)$

Puisque $a(0_{\mathbb{R}^3}) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$, l'application a n'est pas linéaire.

b) Soient $(x,y), (x',y') \in \mathbb{C}^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} b((x,y)+\lambda(x',y')) &= b(x+\lambda x', y+\lambda y') \\ &= \left(2(x+\lambda x') - 3(y+\lambda y'), (x+\lambda x') + 5(y+\lambda y')\right) \\ &= \left(2x-3y+\lambda(2x'-3y'), x+5y+\lambda(x'+5y')\right) \\ &= (2x-3y, x+5y) + \lambda(2x'-3y', x'+5y') \\ &= b(x,y) + \lambda b(x',y'). \end{aligned}$$

Donc l'application b est linéaire.

Elle est injective ssi $\operatorname{Ker} b = \{0_{\mathbb{C}^2}\}$. Or $\operatorname{Ker} b = \left\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \,\middle|\, \begin{cases} 2x-3y=0 \\ x+5y=0 \end{cases}\right\}$

et $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -13 \\ \boxed{1} & 5 \end{pmatrix}$. Le système $\begin{cases} 2x-3y=0 \\ x+5y=0 \end{cases}$ est de rang 2

donc il admet $(0,0)$ pour unique solution. Ainsi $\operatorname{Ker} b = \{(0,0)\}$ et b est injective.

L'application b est surjective ssi pour tous $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, il existe $(x,y) \in \mathbb{C}^2$ tel que $b(x,y) = (a,b)$ ssi pour tous $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, le système $\begin{cases} 2x-3y=a \\ x+5y=b \end{cases}$ admet au moins une solution.

D'après les calculs précédents, ce système est de rang 2 donc il admet toujours une solution (il ne présente pas de ligne incompatible).

Donc b est surjective. Finalement, l'application b est bijective, c'est donc un automorphisme de $\mathbb{C}^2$.

On aurait pu également étudier directement la bijectivité de b en montrant que pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, l'équation $b(x,y) = (a,b)$, d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{C}^2$ admet une unique solution (ce qui est le cas car le système associé, présentant 2 lignes et 2 inconnues, est de rang 2).

c) $c((1,0)+(0,1)) = c(1,1) = 1$

Or $c(1,0) + c(0,1) = 0 + 0 = 0$.

Ainsi $c((1,0)+(0,1)) \neq c(1,0)+c(0,1)$: l'application c n'est pas linéaire.

d) Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} d(P+\lambda Q) &= (P+\lambda Q)(0) + (P+\lambda Q)'(1) \\ &= P(0) + \lambda Q(0) + (P'+\lambda Q')(1) \\ &= P(0) + P'(1) + \lambda(Q(0) + Q'(1)) \\ &= d(P) + \lambda d(Q) \end{aligned}$$

L'application d est donc linéaire.

$d(X(X-1)^2) = 0 + 0 = 0$ donc $X(X-1)^2 \in \operatorname{Ker} d$. $\operatorname{Ker} d \neq \{0_{\mathbb{C}[X]}\}$ donc d n'est pas injective. A fortiori, elle n'est pas non plus bijective.

Soit $z \in \mathbb{C}$. $d(z) = z + 0 = z$ donc z admet au moins un antécédent par d.

L'application d est donc surjective.

f) $f(3X) = (3X)^2 = 9(X^2)$

et $3f(X) = 3X^2$

Ainsi $f(3X) \neq 3f(X)$: f n'est donc pas linéaire.

g) Soient $(a_0, a_1, a_2), (b_0, b_1, b_2) \in \mathbb{C}^3$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} g\left((a_0, a_1, a_2) + \lambda(b_0, b_1, b_2)\right) &= g(a_0 + \lambda b_0, a_1 + \lambda b_1, a_2 + \lambda b_2) \\ &= a_0 + \lambda b_0 + (a_1 + \lambda b_1)X + (a_2 + \lambda b_2)X^2 \\ &= a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \lambda(b_0 + b_1 X + b_2 X^2) \\ &= g(a_0, a_1, a_2) + \lambda g(b_0, b_1, b_2) \end{aligned}$$

L'application g est donc linéaire.

De plus, $\operatorname{Ker} g = \left\{(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{C}^3 \mid g(a_0, a_1, a_2) = 0\right\}$

$$= \left\{(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{C}^3 \mid a_0 + a_1 X + a_2 X^2 = 0\right\}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{un polynôme est nul ssi ses coefficients sont nuls}}}{=} \left\{(0,0,0)\right\}$$

Donc g est injective.

X^3 n'admet pas d'antécédent par g car pour tout $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{C}^3$, $g(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{C}_2[X]$. Donc l'application g n'est pas surjective. A fortiori, elle n'est pas non plus bijective.

h) Soient $f, g \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$h(f+\lambda g) = \left((f+\lambda g)(0), (f+\lambda g)(1)\right) = \left(f(0)+\lambda g(0), f(1)+\lambda g(1)\right)$$
$$= \left(f(0), f(1)\right) + \lambda\left(g(0), g(1)\right) = h(f) + \lambda h(g).$$

Donc l'application h est linéaire.

Introduisons $f : x \mapsto x(x-1)$. Alors $f \neq 0_{\mathbb{C}^{\mathbb{R}}}$ (car par exemple $f(2) \neq 0$)

et $h(f) = \left(f(0), f(1)\right) = 0_{\mathbb{C}^2}$

Donc $f \in \operatorname{Ker} h$ et par conséquent $\operatorname{Ker} h \neq \{0_{\mathbb{C}^{\mathbb{R}}}\}$: l'application h n'est pas injective.

Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Posons $f : x \mapsto -a(x-1) + bx$. Alors $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$

et $h(f) = \left(f(0), f(1)\right) = (a,b)$. Donc (a,b) admet au moins un antécédent par h

Ceci étant vrai pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, l'application h est surjective.

k) Soient $f, g \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$k(f+\lambda g) = f+\lambda g + (f+\lambda g)' = f + f' + \lambda(g+g') = k(f) + \lambda k(g)$$

donc l'application k est linéaire.

$$\operatorname{Ker} k = \{f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}) \mid f+f' = 0\} \underset{\uparrow}{=} \{x \mapsto \lambda e^{-x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

résolution d'une
équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1

Ainsi $\operatorname{Ker} k \neq \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}\}$

donc k n'est pas injective.

Pour tout $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $k(f) = f + f' \in C^0(\mathbb{R})$. En particulier, la fonction partie entière, qui n'est pas continue, n'a pas d'antécédent par k : l'application k n'est pas surjective.

T] Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

Posons $w = u + \lambda v$. Alors

$$T(u+\lambda v) = T(w) = (n w_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(n(u_n + \lambda v_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$= (n u_n)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda (n v_n)_{n\in\mathbb{N}} = T(u) + \lambda T(v)$$

Donc T est linéaire.

S] Soient $u, v \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

Posons $w = u + \lambda v$. Alors

$$S(u+\lambda v) = S(w) = (w_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (u_{n+1} + \lambda v_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$

$$= (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} + \lambda (v_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = S(u) + \lambda S(v)$$

Donc S est linéaire.

TD espace vectoriel

Exercice 21.

L'application S est-elle injective, surjective ?

Puisque S est linéaire, S est injective ssi $\mathrm{Ker}\, S = \{0\}$

Notons a la suite définie par $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$

Alors $a \neq 0$ et $S(a) = (a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}}$ car $a_{n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (si $n \in \mathbb{N}$, $n+1 \in \mathbb{N}^*$)

Donc $a \in \mathrm{Ker}\, S$ et ainsi $\mathrm{Ker}\, S \neq \{0\}$: S n'est pas injective.

Soit $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Introduisons la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_n = v_{n-1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$

Alors $S(u) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (v_{n+1-1})_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = v$

Ainsi, on a montré que pour tout $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, il existe $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que $S(u) = v$.

Donc S est surjective.

Puisque S n'est pas injective, elle n'est pas non plus bijective.

TD espace vectoriel

Exercice 21.

L'application T est-elle injective, surjective ?

Puisque T est linéaire, T est injective ssi $\mathrm{Ker}\, T = \{0\}$.

Posons a la suite définie par : $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* . \end{cases}$

Alors $T(a) = 0$ car $n a_n = \begin{cases} 0 \times a_0 = 0 & \text{si } n = 0 \\ n \times 0 = 0 & \text{si } n > 0 \end{cases}$

Donc $a \in \mathrm{Ker}\, T$. Or u n'est pas la suite nulle. Donc $\mathrm{Ker}\, T \neq \{0\}$ et T n'est pas injective.

Ensuite, on remarque que pour tout $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $T(u)$ est une suite dont le terme d'indice $n = 0$ vaut $0 \times u_0 = 0$. Par conséquent, la suite a, dont le terme d'indice $n = 0$ vaut $a_0 = 1$, n'appartient pas à $\mathrm{Im}\, u$ (c-à-d que a n'a pas d'antécédent par T). Donc T n'est pas surjective.

A fortiori, T n'est pas non plus bijective.

II) espaces vectoriels

Exercice 22.

Soient $M, N \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$u(M+\lambda N) = {}^t(M+\lambda N) \underset{\text{cours}}{=} {}^tM + \lambda\, {}^tN = u(M) + \lambda\, u(N)$$

Par conséquent, u est une application linéaire. Montrons que u est bijective

Posons $v : \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
$N \longmapsto {}^tN$.

Alors $u \circ v = Id_{\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})}$ et $v \circ u = Id_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$ car ${}^t({}^tA) = A$ pour toute matrice A.

Ainsi, u est bijective (et $u^{-1} = v$)

Finalement, u est une application linéaire bijective, donc u est un isomorphisme.

TD espaces vectoriels

Exercice 23.

u) Soient $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$u\big((x,y)+\lambda(x',y')\big) = u(x+\lambda x', y+\lambda y') = \big(x+\lambda x' - (y+\lambda y'), y+\lambda y' - (x+\lambda x'), 0\big)$$
$$= \big(x-y+\lambda(x'-y'), y-x+\lambda(y'-x'), 0\big)$$
$$= (x-y, y-x, 0) + \lambda(x'-y', y'-x', 0)$$
$$= u(x,y) + \lambda u(x',y').$$

L'application u est donc linéaire.

$$\operatorname{Ker} u = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid u(x,y)=0\right\} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{cases} x-y=0 \\ y-x=0 \\ 0=0\end{cases}\right\} = \left\{(x,x) \mid x\in\mathbb{R}\right\}$$

Par conséquent, $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Vect}\big((1,1)\big)$

$$\operatorname{Im} u = \left\{u(x,y) \mid (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\} = \left\{(x-y, y-x, 0) \mid x,y\in\mathbb{R}\right\}$$

Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. $(a,b,c)\in \operatorname{Im} u \iff \exists\, x,y\in\mathbb{R},\ (a,b,c) = (x-y, y-x, 0)$

$\iff$ le système $\begin{cases} x-y=a \\ y-x=b \\ 0=c\end{cases}$ d'inconnue $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ admet au moins une solution

On $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & a \\ -1 & 1 & b \\ 0 & 0 & c\end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & -1 & a \\ 0 & 0 & a+b \\ 0 & 0 & c\end{array}\right)$

Donc $(a,b,c)\in \operatorname{Im} u \iff \begin{cases} a+b=0 \\ c=0\end{cases}$

et $\operatorname{Im} u = \left\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} a+b=0 \\ c=0\end{cases}\right\}$

v) Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$v(z_1 + \lambda z_2) = z_1 + \lambda z_2 + i\left(\overline{z_1 + \lambda z_2}\right) = z_1 + \lambda z_2 + i\bar{z}_1 + \lambda i \bar{z}_2 = v(z_1) + \lambda v(z_2).$$

Donc v est linéaire (si $\mathbb{C}$ est considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel)

$$\mathrm{Ker}\, v = \{ z \in \mathbb{C} \mid v(z) = 0 \} = \{ z \in \mathbb{C} \mid z + i\bar{z} = 0 \}.$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $\begin{cases} a = \mathrm{Re}(z) \\ b = \mathrm{Im}(z). \end{cases}$

$$v(z) = 0 \Leftrightarrow a + ib + i(a - ib) = 0 \Leftrightarrow a + b + i(a+b) = 0 \Leftrightarrow a + b = 0 \Leftrightarrow b = -a$$

Donc $\mathrm{Ker}(v) = \{ a + i(-a) \mid a \in \mathbb{R} \} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(1 - i)$.

$$\mathrm{Im}(v) = \{ v(z) \mid z \in \mathbb{C} \} = \{ z + i\bar{z} \mid z \in \mathbb{C} \} = \{ a + ib + i(a - ib) \mid a, b \in \mathbb{R} \} = \{ a + b + i(a+b) \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

Soit $w \in \mathbb{C}$. $w \in \mathrm{Im}\, v \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R},\ w = a + b + i(a+b) \Leftrightarrow \mathrm{Re}\, w = \mathrm{Im}\, w$.

Donc $\mathrm{Im}(v) = \{ w \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, w = \mathrm{Im}\, w \}$.

w) Soient $P, Q \in \mathbb{C}_3[X]$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$w(P + \lambda Q) = P + \lambda Q - (X+1)(P + \lambda Q)' = P + \lambda Q - (X+1)(P' + \lambda Q')$$
$$= P - (X+1)P' + \lambda(Q - (X+1)Q') = w(P) + \lambda w(Q).$$

Donc w est une application linéaire.

$\mathrm{Ker}(w) = \{ P \in \mathbb{C}_3[X] \mid w(P) = 0 \}$. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{C}_3[X]$.

$$w(P) = 0 \Leftrightarrow aX^2 + bX + c - (X+1)(2aX + b) = 0 \Leftrightarrow -aX^2 - 2aX + c - b = 0$$

$$\Leftrightarrow -a = 0 \text{ et } -2a = 0 \text{ et } c - b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ et } c = b.$$

$\uparrow$

un polynôme est nul ssi ses coefficients sont nuls

Donc $\mathrm{Ker}(w) = \left\{ bX + b \;\middle|\; b \in \mathbb{C} \right\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(X+1)$

$\mathrm{Im}(w) = \left\{ w(P) \;\middle|\; P \in \mathbb{C}_3[X] \right\} = \left\{ w(aX^2 + bX + c) \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$

$= \left\{ -aX^2 - 2aX + c - b \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{C} \right\}.$

Soit $Q = \alpha X^2 + \beta X + \gamma \in \mathbb{C}_3[X]$. $\quad Q \in \mathrm{Im}\, w \Leftrightarrow \exists a$

$Q \in \mathrm{Im}\, w \Leftrightarrow \exists\, a, b, c \in \mathbb{C},\ \alpha X^2 + \beta X + \gamma = -aX^2 - 2aX + c - b$

$\Leftrightarrow \exists a, b, c \in \mathbb{C},\quad -a = \alpha$ et $-2a = \beta$ et $c - b = \gamma$

2 polynômes sont égaux ssi leurs coefficients le sont

$\Leftrightarrow$ le système $\begin{cases} -a = \alpha \\ -2a = \beta \\ c - b = \gamma \end{cases}$ d'inconnue $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ admet au moins une solution.

$\Leftrightarrow \beta = 2\alpha.$

Ainsi $\mathrm{Im}\, w = \left\{ \alpha X^2 + \beta X + \gamma \in \mathbb{C}_3[X] \;\middle|\; \beta = 2\alpha \right\}.$

TD espaces vectoriels

Exercice 24.

G est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et F en est un également car

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid z = t = 0\} = \{(x,y,0,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{(1,0,0,0);(0,1,0,0)\}$$

Montrons que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$ en montrant que tout vecteur de $\mathbb{R}^4$ s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

Analyse : Supposons qu'il existe $f \in F$ et $g \in G$ tels que $(x,y,z,t) = f+g$.

$f \in F$ donc il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f = (a,b,0,0)$

$g \in G$ donc il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $g = \alpha(1,-2,1,0) + \beta(1,-3,3,-1)$

Alors $(x,y,z,t) = f+g = (a+\alpha+\beta, b-2\alpha-3\beta, \alpha+3\beta, -\beta)$

donc $\begin{cases} x = a+\alpha+\beta \\ y = b-2\alpha-3\beta \\ z = \alpha+3\beta \\ t = -\beta \end{cases}$ donc $\begin{cases} \beta = -t \\ \alpha = z+3t \\ b = y+2z+3t \\ a = x-z-2t \end{cases}$ Ainsi $f = (x-z-2t, y+2z+3t, 0, 0)$ et $g = (z+2t, -2z-3t, z, t)$

On vient d'établir l'unicité du couple (f,g) sous réserve d'existence.

Synthèse : Posons $f = (x-z-2t, y+2z+3t, 0, 0)$ et $g = (z+2t, -2z-3t, z, t)$

Alors $f \in F$, $g \in G$ car $g = (z+3t)(1,-2,1,0) + (-t)(1,-3,3,-1)$

et $f+g = (x-z-2t, y+2z+3t, 0, 0) + (z+2t, -2z-3t, z, t) = (x,y,z,t)$.

On vient d'établir l'existence du couple (f,g).

Finalement, par analyse-synthèse, on a montré que pour tout $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, il existe un unique couple $(f,g) \in F \times G$ tel que $(x,y,z,t) = f+g$.

Par conséquent, $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.

De plus, en utilisant la décomposition précédemment trouvée, la projection sur F parallèlement à G est
$$p : \begin{array}{l} \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t) \longmapsto (x-z-2t,\ y+2z+3t,\ 0,\ 0) \end{array}$$

$\left(\text{Car } p : \begin{array}{l} \mathbb{R}^4 = F \oplus G \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t) = f+g \longrightarrow f \end{array} \text{ par définition} \right)$

et la symétrie par rapport à F parallèlement à G est
$$s : \begin{array}{l} \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t) \longmapsto (x-2z-4t,\ y+4z+6t,\ -z,\ -t) \end{array}$$

$\left(\text{Car } s : \begin{array}{l} \mathbb{R}^4 = F \oplus G \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t) = f+g \longmapsto f-g \end{array} \text{ par définition} \right)$

TD espaces vectoriels

Exercice 25.

(a) Posons $g = \frac{1}{6}(f + Id_E)$

Alors $f \circ g = f \circ \frac{1}{6}(f + Id_E) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ est linéaire}}}{=} \frac{1}{6}(f \circ f + f \circ Id_E) = \frac{1}{6}(f \circ f + f) \underset{\substack{\uparrow \\ f\circ f + f = 6 Id_E}}{=} Id_E$

et $g \circ f = \frac{1}{6}(f + Id_E) \circ f = \frac{1}{6}(f \circ f + Id_E \circ f) = \frac{1}{6}(f \circ f + f) \underset{\substack{\uparrow \\ f\circ f + f = 6 Id_E}}{=} Id_E$.

On en déduit que f est bijective et que $f^{-1} = g$.

(b) f et Id_E sont des endomorphismes de E donc $f + 3Id$ et $f - 2Id$ également.
Par conséquent, $Ker(f + 3Id_E)$ et $Ker(f - 2Id_E)$ sont des sous espaces vectoriels de E.
Montrons qu'ils sont supplémentaires dans E en montrant que pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(h, g) \in Ker(f + 3Id_E) \times Ker(f - 2Id_E)$ tels que $x = h + g$.
Soit $x \in E$.

Analyse : Supposons qu'il existe $h \in Ker(f + 3Id_E)$, $g \in Ker(f - 2Id_E)$ tels que $x = h + g$

$h \in Ker(f + 3Id_E)$ donc $(f + 3Id_E)(h) = 0$ donc $f(h) = -3h$.

$g \in Ker(f - 2Id_E)$ donc $(f - 2Id_E)(g) = 0$ donc $f(g) = 2g$.

Alors $f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ x = h+g}}{=} f(h+g) \underset{\substack{\uparrow \\ f \in \mathcal{L}(E)}}{=} f(h) + f(g) = -3h + 2g$.

Ainsi $\begin{cases} x = h + g \\ f(x) = -3h + 2g \end{cases}$ donc $\begin{cases} 3x + f(x) = 5g \\ f(x) - 2x = -5h \end{cases}$ donc $\begin{cases} g = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}f(x) \\ h = \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}f(x) \end{cases}$

On vient d'établir l'unicité du couple (h, g) sous réserve d'existence.

<u>Synthèse</u> : Posons $g = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}f(x)$ et $h = \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}f(x)$.

$$\left(f + 3\,\mathrm{Id}_E\right)(h) = f(h) + 3h = f\left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{5}f(x)\right) + \frac{6}{5}x - \frac{3}{5}f(x)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ f \in \mathcal{L}(E)}}{=} \frac{2}{5}f(x) - \frac{1}{5}f\circ f(x) + \frac{6}{5}x - \frac{3}{5}f(x)$$

$$= \frac{1}{5}\left(6x - f(x) - f\circ f(x)\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } f\circ f + f - 6\,\mathrm{Id}_E = 0}}{=} 0_E$$

Ainsi $h \in \mathrm{Ker}\left(f + 3\,\mathrm{Id}_E\right)$

$$\left(f - 2\,\mathrm{Id}_E\right)(g) = f(g) - 2g = f\left(\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}f(x)\right) - \frac{6}{5}x - \frac{2}{5}f(x)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ f \in \mathcal{L}(E)}}{=} \frac{3}{5}f(x) + \frac{1}{5}f\circ f(x) - \frac{6}{5}x - \frac{2}{5}f(x)$$

$$= \frac{1}{5}\left(f\circ f(x) + f(x) - 6x\right) \underset{\substack{\uparrow \\ f\circ f + f - 6\,\mathrm{Id}_E = 0}}{=} 0_E$$

Donc $g \in \mathrm{Ker}\left(f - 2\,\mathrm{Id}_E\right)$

Enfin : $f + g = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}f(x) + \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}f(x) = x$.

On a établi l'existence du couple (h, g)

Finalement, on a montré que pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(h, g) \in \mathrm{Ker}\left(f + 3\,\mathrm{Id}_E\right) \times \mathrm{Ker}\left(f - 2\,\mathrm{Id}_E\right)$ tel que $x = h + g$.

<u>Donc</u> $E = \mathrm{Ker}\left(f + 3\,\mathrm{Id}_E\right) \oplus \mathrm{Ker}\left(f - 2\,\mathrm{Id}_E\right)$

III) espaces vectoriels

Exercice 26.

ⓐ Pour tout $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, on introduit l'assertion "H_p "$f^p = f^2$"".

L'assertion H_2 est vraie.

Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Supposons H_p vraie. Alors $f^{p+1} = f \circ f^p \underset{H_p}{=} f \circ f^2 = f^3 \underset{\text{énoncé}}{=} f^2$

Donc l'assertion H_{p+1} est vraie.

Finalement, le principe de récurrence assure que l'assertion H_p est vraie pour tout $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

ⓑ Supposons f bijective. $f^3 = f^2$ donc $f^{-1} \circ f^{-1} \circ f^3 = f^{-1} \circ f^{-1} \circ f^2$

Or $f^{-1} \circ f^{-1} \circ f^3 = f^{-1} \circ \underbrace{f^{-1} \circ f}_{Id_E} \circ f \circ f = \underbrace{f^{-1} \circ f}_{Id_E} \circ f = f$

et $f^{-1} \circ f^{-1} \circ f^2 = f^{-1} \circ f^{-1} \circ f \circ f \underset{\text{même raisonnement}}{=} Id_E$

Donc $f = Id_E$.

ⓒ $Ker(f - Id_E)$ et $Ker\, f^2$ sont des sous-espaces vectoriels de E car $f - Id_E, f^2 \in \mathcal{L}(E)$

Montrons que ces espaces sont supplémentaires dans E en montrant que pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(y,z) \in Ker(f - Id_E) \times Ker(f^2)$ tel que $x = y + z$.

Soit $x \in E$.

__Analyse__ : Supposons qu'il existe un couple $(y,z) \in Ker(f - Id_E) \times Ker(f^2)$ tel que $x = y + z$.

$y \in Ker(f - Id_E)$ donc $(f - Id_E)(y) = 0$ donc $f(y) = y$.

$z \in Ker\, f^2$ donc $f^2(z) = 0$.

On $f^2(x) \underset{x=y+z}{=} f^2(y+z) \underset{f^2\in L(E)}{=} f^2(y)+f^2(z) \underset{f^2(z)=0}{=} f(f(y)) \underset{f(y)=y}{=} f(y) \underset{\text{idem}}{=} y$.

Donc $\begin{cases} y = f^2(x) \\ z \underset{z=x-y}{=} x - f^2(x) \end{cases}$. On vient d'établir l'unicité sous réserve d'existence.

__Synthèse :__ Posons $\begin{cases} y = f^2(x) \\ z = x - f^2(x) \end{cases}$.

Alors $(f - Id_E)(y) = f(y) - y = f^3(x) - f^2(x) = 0$ car $f^3 = f^2$. Donc $y \in Ker(f - Id_E)$

De plus, $f^2(z) = f^2(x) - f^4(x) = 0$ car $f^4 = f^2$ d'après ⓐ. Donc $z \in Ker(f^2)$.

Enfin, $y + z = f^2(x) + x - f^2(x) = x$.

On vient d'établir l'existence.

Finalement, on a montré par analyse-synthèse que pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(y,z) \in Ker(f - Id_E) \times Ker(f^2)$ tel que $x = y+z$.

Donc $Ker(f - Id_E) \oplus Ker(f^2) = E$.

II) espace vectoriel

Exercice 27.

ⓐ $(u+v)^2 = (u+v)\circ(u+v) = u\circ(u+v) + v\circ(u+v)$

$= u\circ u + u\circ v + v\circ u + v\circ v = u^2 + u\circ v + v\circ u + v^2$

↑ u et v sont linéaires

ⓑ Par conséquent, $(u+v)^2 = u^2 + 2u\circ v + v^2$ ssi $u\circ v = v\circ u$.

ⓒ Si $u\circ v = v\circ u$, alors

$(u+v)^3 = (u+v)\circ(u+v)^2 = u\circ(u+v)^2 + v\circ(u+v)^2$

$= u\circ(u^2 + 2u\circ v + v^2) + v\circ(u^2 + 2u\circ v + v^2)$

$= u\circ u^2 + 2\, u\circ u\circ v + u\circ v^2 + v\circ u^2 + 2\, v\circ u\circ v + v\circ v^2$

↑ u et v sont linéaires

$= u^3 + 2\, u^2\circ v + u\circ v^2 + v\circ u^2 + 2\, v\circ u\circ v + v^3$.

Or $v\circ u^2 = (v\circ u)\circ u \underset{v\circ u = u\circ v}{=} (u\circ v)\circ u = u\circ(v\circ u) \underset{\text{idem}}{=} u\circ(u\circ v) = u^2\circ v$

et $v\circ u\circ v = (v\circ u)\circ v \underset{\text{idem}}{=} (u\circ v)\circ v = u\circ v^2$

Donc si $u\circ v = v\circ u$, alors $(u+v)^3 = u^3 + 3u^2\circ v + 3u\circ v^2 + v^3$.

ⓓ On peut montrer par récurrence que si $u\circ v = v\circ u$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \circ v^{n-k}$$

TD espaces vectoriels

Exercice 28.

(a) Supposons $E \neq \{0_E\}$. Soit u un endomorphisme nilpotent de E. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Supposons u bijectif. Puisque $E \neq \{0_E\}$, $Id_E \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$

(car il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ et alors $\begin{cases} Id_E(x) = x \\ 0_{\mathcal{L}(E)}(x) = 0_E \end{cases}$ donc $Id_E(x) \neq 0_{\mathcal{L}(E)}(x)$)

Donc en particulier $p \geq 1$.

Posons alors $v = (u^{-1})^p$. On obtient $Id_E \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } (u^{-1})^p \circ u^p = u^{-1} \circ \dots \circ \underbrace{u^{-1} \circ u}_{Id_E \text{ etc...}} \circ \dots \circ u}}{=} v \circ u^p = v \circ 0_{\mathcal{L}(E)} \overset{\substack{v \text{ est linéaire.} \\ \downarrow}}{=} 0_{\mathcal{L}(E)}$

ce qui est absurde.

Donc u n'est pas bijectif.

(b) Par définition, il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $v^q = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Puisque $u \circ v = v \circ u$, d'après la formule du binôme de Newton,

$$(u+v)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} u^k \circ v^{p+q-k}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ u^k = 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ si } k \geq p}}{=} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+q}{k} u^k \circ v^{p+q-k} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pour tout } k \in [\![0, p-1]\!],\ p+q-k \geq q}}{=} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+q}{k} u^k \circ 0_{\mathcal{L}(E)}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ u^k \text{ est linéaire} \\ \text{pour tout } k \in \mathbb{N}}}{=} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+q}{k} 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Ainsi $(u+v)^{p+q} = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $u+v$ est nilpotent.

TD espaces vectoriels

Exercice 29.

Soit $y \in \mathrm{Im}(\alpha u)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = \alpha u(x)$.
u étant linéaire, on en déduit que $y = u(\alpha x)$ donc $y \in \mathrm{Im}(u)$.

Par conséquent, $\mathrm{Im}(\alpha u) \subset \mathrm{Im}(u)$.

Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. u est linéaire et α est non nul donc $y = \alpha u\left(\frac{1}{\alpha} x\right)$. Ainsi $y \in \mathrm{Im}(\alpha u)$.

On en déduit que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Im}(\alpha u)$.

Finalement, de la double inclusion on déduit l'égalité des ensembles : $\mathrm{Im}(\alpha u) = \mathrm{Im}(u)$.

Soit $y \in \mathrm{Im}(u+v)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = (u+v)(x)$. Alors $y = u(x) + v(x)$.
Or $u(x) \in \mathrm{Im}\, u$, $v(x) \in \mathrm{Im}\, v$. Donc $y \in \mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v$. Ainsi, $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v$

Soit $x \in \mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v$. Alors $\left|\begin{array}{l} u(x) = 0 \\ v(x) = 0 \end{array}\right.$ car $x \in \left|\begin{array}{l} \mathrm{Ker}\, u \\ \mathrm{Ker}\, v \end{array}\right.$.

Donc $(u+v)(x) = u(x) + v(x) = 0$ et $x \in \mathrm{Ker}(u+v)$. Par conséquent, $\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v \subset \mathrm{Ker}(u+v)$

Les inclusions réciproques sont fausses en général : posons par exemple $u : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{array}$.
et $v = -u$. Alors $u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Im}\, v = \mathbb{R}$
$\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, v = \{0\}$

donc $\mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v = \mathbb{R} + \mathbb{R} = \mathbb{R}$ et $\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v = \{0\} \cap \{0\} = \{0\}$.

Or $u + v = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R})}$ donc $\mathrm{Im}(u+v) = \{0\}$ et $\mathrm{Ker}(u+v) = \mathbb{R}$.

Ainsi $\mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v \not\subset \mathrm{Im}(u+v)$ et $\mathrm{Ker}\, u+v \not\subset \mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v$.

TD espaces vectoriels

Exercice 30.

(a) Soit $x \in \operatorname{Ker} u$. Alors $u(x) = 0$ donc $u^2(x) = u(u(x)) = u(0) \underset{\uparrow}{=} 0$
u est linéaire

Donc $x \in \operatorname{Ker} u^2$.

Ainsi $\operatorname{Ker}(u) \subset \operatorname{Ker}(u^2)$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \operatorname{Ker} u^p$. Alors $u^p(x) = 0$ donc $u^{p+1}(x) = u(u^p(x)) = u(0) = 0$.
Donc $x \in \operatorname{Ker} u^{p+1}$.

Ainsi $\operatorname{Ker} u^p \subset \operatorname{Ker} u^{p+1}$

Les inclusions réciproques sont fausses en général : par exemple, considérons

$$u : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (0, x) \end{array}.$$

On vérifie aisément que $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

De plus, $u^2 : (x, y) \longmapsto (0, 0)$.

Donc $\operatorname{Ker} u = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ et $\operatorname{Ker} u^2 = \mathbb{R}^2$: ainsi $\operatorname{Ker} u^2 \not\subset \operatorname{Ker} u$.

(b) Soit $y \in \operatorname{Im} u^2$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u^2(x)$. Alors $y = u(u(x))$ donc $y \in \operatorname{Im} u$. Ainsi $\operatorname{Im} u^2 \subset \operatorname{Im} u$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit $y \in \operatorname{Im} u^{p+1}$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u^{p+1}(x)$
Alors $y = u^p(u(x))$ donc $y \in \operatorname{Im} u^p$. Par conséquent $\operatorname{Im} u^{p+1} \subset \operatorname{Im} u^p$.