

Espaces vectoriels : Structure de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Exemples de références : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}^\Omega$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Sous-espaces vectoriels, caractérisation. Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs.

Intersection de sous-espaces vectoriels. Somme de sous-espaces vectoriels. Somme directe. Caractérisation par l'intersection. Sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Applications linéaires : applications linéaires, endomorphismes. Opération : combinaison linéaire et composée. Image directe d'un sous-espace vectoriel. Image et noyau. Caractérisation de l'injectivité.

Endomorphismes remarquables : homothéties, projecteurs et symétries ; caractérisation des projecteurs et des symétries. Structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire.

A - Questions de cours :

1. Énoncer la caractérisation de la notion de sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .
2. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $e_1, \dots, e_p$ des vecteurs de E . Définir le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(e_1, \dots, e_p)$. Énoncer sa caractérisation en terme de plus petit sous-espace vectoriel de E contenant les vecteur $e_1, \dots, e_p$.
3. Définir la notion d'application linéaire entre deux espaces vectoriels.
4. Soit E, F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Donner la définition du noyau et de l'image de u .
5. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E . Définir la somme de F et G . Quand dit-on que cette somme est directe ? Quand dit-on que F et G sont supplémentaires ?
6. Définir la notion d'équation linéaire. Donner la structure de l'ensemble de ses solutions.
7. Définir la notion de projecteur d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . Caractériser les projecteurs de E .
8. Définir la notion de symétrie d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . Caractériser les symétries de E .

B - Savoir-faire

1. Montrer que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
2. Soit u une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F . Montrer que $u(0_E) = 0_F$. Prouver que u est injective si et seulement si $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$.
3. Soit u une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F . Montrer que $\text{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E .
4. Soit u une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F . Montrer que $\text{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de F .
5. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E . Montrer que $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u \circ u)$ et que $\text{Im}(u \circ u) \subset \text{Im}(u)$.
6. Décrire comme un sous-espace vectoriel engendré le noyau d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par le colleur.
7. Déterminer un système d'équations cartésiennes de l'image d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par le colleur.
8. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et p un endomorphisme de E vérifiant $p \circ p = p$. Montrer que $\text{Ker } p$ et $\text{Ker}(p - \text{id}_E)$ sont supplémentaires dans E .
9. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et s un endomorphisme de E vérifiant $s \circ s = \text{id}_E$. Montrer que $\text{Ker}(s - \text{id}_E)$ et $\text{Ker}(s + \text{id}_E)$ sont supplémentaires dans E .

C - une question de cours ou un savoir-faire d'un des programmes précédents