

Corrigé des exercices du chapitre Intégration

2. Soit $x \in [0; 1]$. Alors $x^2 \leq 1$ et $1 \leq \sqrt{1+x^4}$, donc $x^2 \leq \sqrt{1+x^4}$. La croissance de l'intégrale assure alors, puisque $0 < 1$:

$$\int_0^1 x^2 dx \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx$$

3. Considérons la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = 0$ si $x \neq \frac{1}{2}$ et $f(\frac{1}{2}) = 1$. Alors f est une fonction en escalier sur $[0; 1]$, positive et non nulle car $f(\frac{1}{2}) \neq 0$, et :

$$\int_0^1 f(t) dt = 0 \times \left(\frac{1}{2} - 0\right) + 0 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 0$$

4. P est un polynôme à coefficients réels, donc $x \mapsto P^2(x)$ est une fonction continue et positive sur $[0; 1]$. Puisque son intégrale est nulle, alors d'après la stricte positivité de l'intégrale, pour tout $x \in [0; 1]$, $P^2(x) = 0$. Le polynôme P possède donc une infinité de racines (tous les réels de $[0; 1]$), c'est donc le polynôme nul.

5. La fonction cosinus étant décroissante sur $[0; \frac{\pi}{4}]$, on a pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{4}]$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \cos(x) \leq 1$$

et par conséquent :

$$1 \leq \frac{1}{\cos(x)} \leq \sqrt{2}$$

La croissance de l'intégrale donne le résultat.

6. (a)

$$\int_{[0;1]} (f - f^2)^2 = \int_{[0;1]} (f^2 - 2f^3 + f^4) = \int_{[0;1]} f^2 - 2 \int_{[0;1]} f^3 + \int_{[0;1]} f^4 = 0$$

d'après les hypothèses.

- (b) Soit $f \in E$. Alors $(f - f^2)^2$ est une fonction continue et positive sur $[0; 1]$. D'après la question précédente et la stricte positivité, $(f - f^2)^2$ est la fonction nulle sur $[0; 1]$, ainsi, pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x) = f^2(x)$, donc $f(x) = 0$ ou $f(x) = 1$. Supposons f non constante. Alors il existe $a, b \in [0; 1]$ tels que $f(a) = 0$ et $f(b) = 1$. f étant continue sur l'intervalle $[0; 1]$, le théorème des valeurs intermédiaires assure alors l'existence d'un réel $c \in [0; 1]$ tel que $f(c) = \frac{1}{2}$, ce qui est absurde puisque $f(c) \in \{0, 1\}$. Ainsi, f est constante, donc f est soit la fonction nulle, soit la fonction constante égale à 1. Réciproquement, on vérifie que ces deux fonctions sont bien éléments de E . Finalement, $E = \{x \mapsto 0\} \cup \{x \mapsto 1\}$.

7. (a) Considérons la fonction F définie sur $[a, b]$ par

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

F est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et $F(a) = F(b)$ car $F(a) = 0$ et $F(b) = 0$ par hypothèse. Le théorème de Rolle assure alors l'existence d'un réel $c \in]a, b[$ tel que $F'(c) = 0$. Puisque $F' = f$, alors f s'annule au moins une fois sur $[a, b]$.

Remarque : on aurait pu aussi prouver ce résultat par l'absurde : f étant continue sur l'intervalle $[a, b]$, si elle ne s'annule pas, alors elle est de signe constant d'après le théorème des valeurs intermédiaires. La stricte positivité de l'intégrale permet alors d'obtenir que $\int_a^b f(t) dt \neq 0$ ce qui contredit l'hypothèse.

- (b) Considérons la fonction g définie sur $[0; 1]$ par $g(x) = f(x) - x$. g est continue sur $[0; 1]$, avec :

$$\int_0^1 g(t) dt = \int_0^1 f(t) dt - \int_0^1 t dt = \frac{1}{2} - \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 0$$

La question précédente assure alors que g s'annule au moins une fois sur $[0; 1]$, ce qui montre que f admet au moins un point fixe.

9. (a) On sait que pour tout réel t , $\cos(t) \leq 1$, c'est donc encore vrai pour $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

Pour l'autre inégalité, on peut étudier la fonction $t \mapsto \cos(t) - 1 + \frac{t^2}{2}$ (en dérivant deux fois), ou utiliser la formule de Taylor avec reste intégral : $\cos$ est de classe C^3 sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, donc, pour $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$:

$$\cos(t) = \cos(0) - \sin(0)t - \frac{\cos(0)}{2}t^2 + \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} \cos^{(3)}(s) ds = 1 - \frac{t^2}{2} + \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} \sin(s) ds$$

Or, puisque $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, pour $s \in [0; t]$, $\sin(s) \geq 0$, donc, d'après la positivité de l'intégrale, on obtient

$$\int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} \sin(s) ds \geq 0$$

ce qui montre que $\cos(t) \geq 1 - \frac{t^2}{2}$.

- (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x)$ est définie si et seulement si $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t}$ est continue sur le segment d'extrémités x et $2x$.
O, la fonction $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi, si $f(x)$ est défini, alors $x \in \mathbb{R}^{ast}$.
Réciproquement, soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors :

- si $x > 0$: $[x; 2x] \subset]0; +\infty[$;
- si $x < 0$: $[2x; x] \subset]-\infty; 0[$.

Dans les deux cas, la fonction $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t}$ est continue sur le segment d'extrémités x et $2x$, ce qui montre que $f(x)$ est bien défini. Finalement, f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

- (c) Supposons $x \in]0; \frac{\pi}{4}]$. Alors, pour $t \in [x; 2x]$, on a $t \in]0; \frac{\pi}{2}]$, donc d'après la question a, et puisque $t > 0$:

$$\frac{1}{t} - \frac{t}{2} \leq \frac{\cos(t)}{t} \leq \frac{1}{t}$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient, puisque $x < 2x$:

$$\ln(2) - \frac{3}{4}x^2 \leq f(x) \leq \ln(2)$$

- (d) D'après la question précédente, puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(2) - \frac{3}{4}x^2) = 0$, le théorème des gendarmes assure que f admet une limite à droite en 0, avec $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \ln(2)$.
(e) Remarquons que f est paire. En effet, si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$, et :

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{\cos(t)}{t} dt = \int_x^{2x} \frac{\cos(-u)}{-u} (-1) du = f(x)$$

Par parité, f admet donc aussi une limite à gauche en 0, avec $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \ln(2)$.

10. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après l'inégalité de la moyenne, puisque $a < b$:

$$|v_n| \leq \int_a^b |g(t) \cos(nt)| dt$$

Or, pour tout $t \in [a, b]$, $|g(t) \cos(nt)| \leq |g(t)| \times |\cos(nt)| \leq |g(t)|$. Alors, par croissance de l'intégrale :

$$|v_n| \leq \int_a^b |g(t)| dt$$

ce qui montre que la suite (v_n) est bornée.

- (b) Les fonctions f et $t \mapsto \cos(nt)$ sont de classe C^1 sur l'intervalle $[a, b]$, donc, par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} I_n &= \left[f(t) \frac{-\cos(nt)}{n} \right]_a^b + \int_a^b f'(t) \frac{\cos(nt)}{n} dt \\ &= \frac{1}{n} (f(a) \cos(na) - f(b) \cos(nb)) + \frac{1}{n} \int_a^b f'(t) \cos(nt) dt \end{aligned}$$

D'après l'inégalité triangulaire, et la question précédente (puisque $f' \in C^0([a, b]; \mathbb{R})$) :

$$|I_n| \leq \frac{1}{n} (|f(a)| + |f(b)|) + \frac{1}{n} \int_a^b |f'(t)| dt$$

Le théorème des gendarmes assure alors de la convergence de la suite (I_n) vers 0.

11. (a) $I_0 = \int_1^e 1 dt = e - 1$ et $I_1 = \int_1^e \ln(t) dt = [t \ln(t) - t]_1^e = 1$.
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $t \in [1; e]$, $0 \leq \ln(t) \leq 1$, donc $\ln^{n+1}(t) \leq \ln^n(t)$. Par croissance de l'intégrale, on obtient $I_{n+1} \leq I_n$, ce qui montre que la suite (I_n) est décroissante.
- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\ln^n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [1; e]$, la positivité de l'intégrale assure que $I_n \geq 0$. Ainsi, la suite (I_n) est décroissante et minorée, donc convergente.
- (d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par intégration par parties :

$$I_{n+1} = [t \ln^{n+1}(t)]_1^e - \int_1^e t \times \frac{n+1}{t} \ln^n(t) dt = e - (n+1)I_n$$

- (e) Notons $\ell = \lim I_n$. Puisque $I_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, par passage à la limite, $\ell \geq 0$. Supposons $\ell \neq 0$. Alors $(n+1)I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Par passage à la limite dans la relation précédente, on obtient alors $\ell = -\infty$ ce qui est absurde. Ainsi, $\ell = 0$.

12. (a) $J_1 = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt = \left[\frac{1}{2} \ln(1+t^2) \right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{2}$.
- (b) Pour $t \in [0, 1]$, $1+t^2 \geq 1 > 0$ et $t^n \geq 0$, donc $0 \leq \frac{t^n}{1+t^2} \leq t^n$. Par croissance de l'intégrale, on obtient $0 \leq J_n \leq \int_0^1 t^n dt$, et puisque $\int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$, on a donc : $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$. Le théorème des gendarmes assure alors que (J_n) converge vers 0.
- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par intégration par parties, on obtient :

$$I_n = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \ln(1+t^2) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} \times \frac{2t}{1+t^2} dt = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}$$

- (d) Puisque $J_{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, les opérations sur les limites donnent $\lim I_n = 0$.

13. (a) $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}$, $u_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln(2)$, $u_2 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$.
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in [0; 1]$, $x^{n+1} \leq x^n$, donc $0 < 1+x^{n+1} \leq 1+x^n$. Par inverse, $\frac{1}{1+x^n} \leq \frac{1}{1+x^{n+1}}$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^{n+1}} - \frac{1}{1+x^n}$ est donc à valeurs positives sur $[0; 1]$ et continue sur cet intervalle. De plus, ce n'est pas la fonction nulle (car $2^n \neq 2^{n+1}$). Par stricte positivité, on obtient $\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^{n+1}} - \frac{1}{1+x^n} \right) dx > 0$, ce qui donne par linéarité $u_{n+1} > u_n$: la suite (u_n) est bien strictement croissante.
- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in [0; 1]$, $1+x^n \geq 1 > 0$, donc $\frac{1}{1+x^n} \leq 1$ d'après la décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$. Par ailleurs, $(1-x^n)(1+x^n) = 1-x^{2n} \leq 1$, donc, puisque $1+x^n > 0$, on en tire : $1-x^n \leq \frac{1}{1+x^n}$. Finalement :

$$1-x^n \leq \frac{1}{1+x^n} \leq 1$$

- (d) Par croissance de l'intégrale, l'encadrement précédent fournit :

$$\int_0^1 (1-x^n) dx \leq u_n \leq \int_0^1 1 dx$$

c'est-à-dire

$$1 - \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq 1$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$, le théorème des gendarmes assure que (u_n) converge vers 1.

14. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in [0; 1]$, $x^{n+1} \leq x^n$ et $e^x > 0$, donc $x^{n+1} e^x \leq x^n e^x$. La croissance de l'intégrale donne alors $I_{n+1} \leq I_n$, ce qui montre que la suite (I_n) est décroissante.
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in [0; 1]$, $x^n e^x \geq 0$, donc $I_n \geq 0$ par positivité de l'intégrale. La suite (I_n) est donc décroissante et minorée, donc convergente.
- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in [0; 1]$, $0 \leq e^x \leq e$ et $x^n \geq 0$, donc $0 \leq x^n e^x \leq x^n e$. Par croissance de l'intégrale, on obtient alors

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n e dx$$

c'est-à-dire, puisque $\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$:

$$0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$$

La suite (I_n) étant convergente, par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient $0 \leq \lim I_n \leq 0$, donc $\lim I_n = 0$.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par intégration par parties :

$$I_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} e^x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} e^x dx = \frac{e}{n+1} - \frac{1}{n+1} I_{n+1}$$

(e) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} I_{n+1} - \frac{(-1)^n}{n!} I_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} I_{n+1} - \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{e}{n+1} - \frac{1}{n+1} I_{n+1} \right) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} (I_{n+1} + e - I_{n+1}) =$$

(f) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0$, ainsi, $u_n = u_0 + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} e$, avec $u_0 = I_0 = \int_0^1 e^x dx = e - 1$.

Ainsi :

$$I_n = (-1)^n n! u_n = (-1)^n n! (e - 1) + \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k+1} \frac{n!}{(k+1)!} e$$

15. Soit $x \in \mathbb{R}$. $F(x)$ est défini si et seulement si $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur le segment d'extrémités x et $2x$. Or, la fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi, si $F(x)$ est défini, alors $x \in \mathbb{R}^*$.

Réciproquement, soit $x \in \mathbb{R}^*$. Les réels x et $2x$ sont de même signe. Ainsi, si $x > 0$, alors $[x; 2x] \subset]0; +\infty[$, donc $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $[x; 2x]$, donc $F(x)$ est bien défini. De même, si $x < 0$, alors $[2x; x] \subset]-\infty; 0[$, donc $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $[2x; x]$, donc $F(x)$ est bien défini. Finalement, F est définie sur $\mathbb{R}^*$.

De plus, on sait que $\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\cos$ qui est bornée : $|\cos| \leq 1$, donc $\sin$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. En particulier, puisque $\sin(0) = 0$, pour tout réel t , $|\sin(t)| \leq |t|$. Soit $x \in]0; +\infty[$. Alors pour $t \in [x; 2x]$, on a $0 \leq \sin(t) \leq t$ donc, puisque $t > 0$, $0 \leq \frac{\sin(t)}{t} \leq 1$. Par croissance de l'intégrale, puisque $x < 2x$, on obtient :

$$0 \leq F(x) \leq x$$

Le théorème des gendarmes assure alors que $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0$.

16. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \int_{-x}^{-2x} e^{-t^2} dt$.

Effectuons le changement de variable $t = -u$: $dt = -du$, et si $t = -x$, alors $u = x$, si $t = -2x$, alors $u = 2x$. On obtient ainsi :

$$f(-x) = \int_x^{2x} e^{-(-u)^2} (-1) du = - \int_x^{2x} e^{-u^2} du = -f(x)$$

ce qui montre que f est impaire.

(b) La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc y admet des primitives. Soit φ l'une d'elles. Alors pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$. φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et $x \mapsto 2x$ aussi, donc par composée, $x \mapsto \varphi(2x)$ aussi. Par somme, f est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, avec pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 2\varphi'(2x) - \varphi'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$. $f'(x) \geq 0 \iff 2e^{-4x^2} \geq e^{-x^2} \iff 2 \leq e^{3x^2}$, car $e^{-4x^2} > 0$. Ainsi, $f'(x) \geq 0 \iff \ln(2) \leq 3x^2 \iff -\frac{\ln(2)}{3} \leq x \leq \frac{\ln(2)}{3}$.

La fonction f est donc décroissante sur $]-\infty; -\frac{\ln(2)}{3}]$, croissante sur $[-\frac{\ln(2)}{3}; \frac{\ln(2)}{3}]$ puis décroissante sur $[\frac{\ln(2)}{3}; +\infty[$.

(d) Soit $x > 0$. Pour $t \in [x; 2x]$, on a $x^2 \leq t^2 \leq 4x^2$ car la fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$. On en déduit $e^{-4x^2} \leq e^{-t^2} \leq e^{-x^2}$. Par croissance de l'intégrale, on obtient, puisque $x \leq 2x$:

$$\int_x^{2x} e^{-4x^2} dt \leq \int_x^{2x} e^{-t^2} dt \leq \int_x^{2x} e^{-x^2} dt$$

ce qui donne :

$$x e^{-4x^2} \leq f(x) \leq x e^{-x^2}$$

(e) D'après la croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2)^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-4x^2} = 0$. Le théorème des gendarmes donne alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

17. (a) La fonction $\frac{1}{\ln}$ est continue sur $A =]0; 1[\cup]1; +\infty[$, donc pour que $f(x)$ soit défini, il est nécessaire que $x - 1 \in A$ et $x^2 \in A$. On doit donc avoir $x \in]1; 2[\cup]2; +\infty[$.
 Si $x \in]1; 2[$, alors $x - 1 \in]0; 1[$ et $x^2 \in]1; +\infty[$, donc $1 \in [x; x^2]$: la fonction $\frac{1}{\ln}$ n'est pas défini sur $[x; x^2]$: $f(x)$ n'est donc pas défini.
 Si $x > 2$, alors $x - 1 > 1$ et $x^2 > 1$. De plus, $x^2 > x$. Ainsi, $[x; x^2] \subset]1; +\infty[$. La fonction $\frac{1}{\ln}$ est alors continue sur le segment $[x; x^2]$: $f(x)$ est donc bien défini.
 Finalement, le domaine de définition de f est $D =]2; +\infty[$.
- (b) La fonction $\frac{1}{\ln}$ est continue sur $]1; +\infty[$ donc y admet des primitives. Soit φ l'une d'elles. Pour $x \in D$, on a donc $f(x) = \varphi(x^2) - \varphi(x - 1)$.
 La fonction φ est de classe C^1 sur $]1; +\infty[$; les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x - 1$ sont de classe C^1 sur D à valeurs dans $]1; +\infty[$, donc par composée, $x \mapsto \varphi(x^2)$ et $x \mapsto \varphi(x - 1)$ sont de classe C^1 sur D . Par somme, f est de classe C^1 sur D , avec pour $x \in D$:

$$f'(x) = 2x\varphi'(x^2) - \varphi'(x - 1) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x - 1)} = \frac{x}{\ln(x)} - \frac{1}{\ln(x - 1)}$$

18. (a) La fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$ est continue sur $]0; +\infty[$, donc y admet des primitives. Notons g l'une d'elles. Alors, pour $x > 0$, on a puisque $\frac{1}{x} > 0$:

$$F(x) = g\left(\frac{1}{x}\right) - g(x)$$

Construite comme composée et somme de fonctions dérivables sur leur domaine de définition, F l'est aussi, avec, pour $x > 0$:

$$F'(x) = -\frac{1}{x^2}g'\left(\frac{1}{x}\right) - g'(x) = -\frac{1}{x^2} \frac{\ln \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} - \frac{\ln(x)}{1 + x^2} = -\frac{-\ln(x)}{x^2 + 1} - \frac{\ln(x)}{1 + x^2} = 0$$

La fonction F est donc constante sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Or $F(1) = 0$, donc F est la fonction nulle.

- (b) $t \mapsto \frac{1}{t}$ est de classe C^1 sur l'intervalle d'extrémités x et $\frac{1}{x}$. Quand $t = x$, $u = \frac{1}{x}$, et quand $t = \frac{1}{x}$, $u = x$. De plus, $dt = -\frac{1}{u^2}du$. Ainsi, le changement de variable $u = \frac{1}{t}$ donne :

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{1 + \frac{1}{u^2}} \times \frac{-1}{u^2} du = \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{-\ln(u)}{u^2 + 1} du = -F(x)$$

ce qui montre que $F(x) = 0$ pour tout $x > 0$.

19. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$. Alors $\sin(x - t) = \sin(x)\cos(t) - \cos(x)\sin(t)$. Ainsi, par linéarité de l'intégrale, on obtient :

$$g(x) = \sin(x) \int_0^x f(t) \cos(t) dt - \cos(x) \int_0^x f(t) \sin(t) dt$$

D'après le théorème fondamental du calcul différentiel, les fonctions $x \mapsto \int_0^x f(t) \cos(t) dt$ et $x \mapsto \int_0^x f(t) \sin(t) dt$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc par produit, g est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \cos(x) \int_0^x f(t) \cos(t) dt + \sin(x)f(x) \cos(x) + \sin(x) \int_0^x f(t) \sin(t) dt - \cos(x)f(x) \sin(x) \\ &= \cos(x) \int_0^x f(t) \cos(t) dt + \sin(x) \int_0^x f(t) \sin(t) dt \end{aligned}$$

- (b) Construite comme somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, g' est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}$, ce qui montre que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g''(x) &= -\sin(x) \int_0^x f(t) \cos(t) dt + f(x) \cos^2(x) + \cos(x) \int_0^x f(t) \sin(t) dt + f(x) \sin^2(x) \\ &= -\sin(x) \int_0^x f(t) \cos(t) dt + \cos(x) \int_0^x f(t) \sin(t) dt + f(x) \\ &= -g(x) + f(x) \end{aligned}$$

ce qui montre que g est solution de l'équation différentielle $y'' + y = f$.

- (c) L'équation homogène associée $y'' + y = 0$ a pour solutions les fonctions $x \mapsto A \cos(x) + B \sin(x)$, où A et B sont deux constantes réelles. Puisque g est une solution de cette équation, alors l'ensemble des solutions de l'équation $y'' + y = f$ est donc :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(x) + A \cos(x) + B \sin(x) \end{array} \right. \mid A, B \in \mathbb{R} \right\}$$
