

Corrigé des exercices du chapitre Intégration

Exercice 17 = exercice 20

Exercice 18 = exercice 22

Exercice 19 = exercice 23

Exercice 22 = exercice 26

TD Intégration. Corrigé exercice 17.

(a) la fonction H est définie sur $I = \{x \in \mathbb{R} \mid t \mapsto \frac{1}{\ln t} \in C^0([\min(x, x^2), \max(x, x^2)])\}$

Où $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est définie et continue sur $\Delta = \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0 \text{ et } \ln t \neq 0\} =]0, 1[\cup]1, +\infty[$

* Donc $I \subset]0, 1[\cup]1, +\infty[$ car si $x \in I$, $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ doit être définie en x .

* Réciproquement, soit $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

Supposons dans un premier temps que $x \in]0, 1[$. Alors $x^2 \in]0, 1[$ et $[\min(x, x^2), \max(x, x^2)] = [x^2, x] \subset]0, 1[\subset \Delta$

Donc $x \in I$.

Supposons à présent que $x \notin]0, 1[$. Alors $x \in]1, +\infty[$. Donc $x^2 \in]1, +\infty[$ et $[\min(x, x^2), \max(x, x^2)] = [x, x^2] \subset]1, +\infty[\subset \Delta$.

Donc $x \in I$.

Ainsi on a montré que pour tout $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, $x \in I$.

Donc $]0, 1[\cup]1, +\infty[\subset I$.

Finalement, de la double inclusion on déduit l'égalité des ensembles :

$$]0, 1[\cup]1, +\infty[= I.$$

(b) Soit $x \in I$. Supposons $x \in]0, 1[$. Alors $[\min(x, x^2), \max(x, x^2)] = [x^2, x] \subset]0, 1[$

et $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est négative sur $]0, 1[$ donc pour tout $t \in [x^2, x]$, $\frac{1}{\ln t} \leq 0$.

Par croissance de l'intégrale sur un segment, on en déduit $\int_{[x^2, x]} \frac{dt}{\ln t} \leq 0$.

On $H(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} = - \int_{[x^2, x]} \frac{dt}{\ln t}$. Donc $H(x) \geq 0$.

Supposons à présent que $x \notin]0, 1[$. Alors $x \in]1, +\infty[$. Donc $[\min(x, x^2), \max(x, x^2)] = [x, x^2] \subset]1, +\infty[$.

On $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est positive sur $]1, +\infty[$ donc pour tout $t \in [x, x^2]$, $\frac{1}{\ln t} \geq 0$.

Par croissance de l'intégrale sur un segment, on en déduit $\int_{[x, x^2]} \frac{dt}{\ln t} \geq 0$.

On $H(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} = \int_{[x, x^2]} \frac{dt}{\ln t}$. Donc $H(x) \geq 0$.

Finalement, on a montré que $H(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

© Soit $x \in]0, 1[$. $x^2 < x$ et pour tout $t \in [x^2, x]$, $\ln(x^2) \leq \ln t \leq \ln x < 0$. Or la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$ donc pour tout $t \in [x^2, x]$ $\frac{1}{2 \ln x} = \frac{1}{\ln x^2} \geq \frac{1}{\ln t} \geq \frac{1}{\ln x}$.

Par croissance de l'intégrale sur un segment, on en déduit

$$\int_{[x^2, x]} \frac{1}{2 \ln x} dt \geq \int_{[x^2, x]} \frac{dt}{\ln t} \geq \int_{[x^2, x]} \frac{dt}{\ln x}$$

donc $\frac{(x-x^2)}{2 \ln x} \geq -H(x) \geq \frac{(x-x^2)}{\ln x}$ donc $\frac{x^2-x}{2 \ln x} \leq H(x) \leq \frac{x^2-x}{\ln x}$.

On $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-x}{2 \ln x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-x}{\ln x} = 0$ donc par théorème d'encadrement,

$\lim_{x \rightarrow 0} H(x) = 0$.

Soit $x \in]1, +\infty[$. Alors $x < x^2$ et pour tout $t \in [x, x^2]$, $0 < \ln(x) \leq \ln t \leq \ln(x^2)$. Or la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc pour tout $t \in [x, x^2]$ $\frac{1}{\ln x} \geq \frac{1}{\ln t} \geq \frac{1}{\ln(x^2)} = \frac{1}{2 \ln x}$.

Par croissance de l'intégrale sur un segment, on en déduit

$$\int_{[x, x^2]} \frac{1}{\ln x} dt \geq \int_{[x, x^2]} \frac{dt}{\ln t} \geq \int_{[x, x^2]} \frac{dt}{2 \ln x}.$$

c'est-à-dire $\frac{(x^2 - x)}{\ln x} \geq H(x) \geq \frac{(x^2 - x)}{2 \ln x}$

Or $x^2 - x \underset{+\infty}{\sim} x^2$ et $\ln x = o(x^2) \underset{+\infty}{}$ d'après le théorème des croissances comparées.

Donc $\frac{x^2 - x}{2 \ln x} \underset{+\infty}{\rightarrow} +\infty$

le théorème de minoration assure alors que $H(x) \underset{+\infty}{\rightarrow} +\infty$

(d) Soit $x > 1$. Pour tout $t \in [x, x^2]$, $0 < x \leq t \leq x^2$ donc $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{t} \geq \frac{1}{x^2}$
et d'autre part, $\frac{1}{\ln t} \geq 0$ donc

$$\frac{1}{x \ln t} \geq \frac{1}{t \ln t} \geq \frac{1}{x^2 \ln t}.$$

Par croissance de l'intégrale sur un segment, on obtient alors

$$\int_{[x, x^2]} \frac{dt}{x \ln t} \geq \int_{[x, x^2]} \frac{dt}{t \ln t} \geq \int_{[x, x^2]} \frac{dt}{x^2 \ln t}$$

On $\int_{[x, x^2]} \frac{dt}{x \ln t} = \frac{1}{x} \int_{[x, x^2]} \frac{dt}{\ln t} = \frac{H(x)}{x}$

et $\int_{[x, x^2]} \frac{dt}{x^2 \ln t} = \frac{1}{x^2} \int_{[x, x^2]} \frac{dt}{\ln t} = \frac{H(x)}{x^2}$

donc $\frac{H(x)}{x^2} \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t} \leq \frac{H(x)}{x}.$

(e) Soit $x > 1$. $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t} = \left[\ln(\ln t) \right]_x^{x^2} \underset{\substack{\ln x^2 > 0 \\ \ln x > 0 \text{ car } x > 1}}{\uparrow} = \ln(\ln x^2) - \ln(\ln x) = \ln(2 \ln x) - \ln(\ln x) = \ln 2.$

⑧ Soit $x \in]1, +\infty[$. Avec les questions ④ et ⑥, on a montré que $\frac{H(x)}{x^2} \leq \ln 2 \leq \frac{H(x)}{x}$

et puisque $\begin{cases} x > 0 \\ x^2 > 0 \end{cases}$, on en déduit $H(x) \leq x^2 \ln 2$ et $x \ln 2 \leq H(x)$ donc

$$x \ln 2 \leq H(x) \leq x^2 \ln 2. \quad \text{On } \lim_{x \rightarrow 1^+} x \ln 2 = \ln 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 \ln 2 = \ln 2$$

donc par théorème d'encadrement, $\lim_{x \rightarrow 1^+} H(x) = \ln 2$.

⑨ Soit $x \in]0, 1[$. Pour tout $t \in [x^2, x]$ $0 < x^2 \leq t \leq x$ donc $\frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{t} \geq \frac{1}{x}$ et d'autre part, $\frac{1}{\ln t} \leq 0$ donc

$$\frac{1}{x^2 \ln t} \leq \frac{1}{t \ln t} \leq \frac{1}{x \ln t}. \quad \text{Par croissance de l'intégrale sur un segment, on obtient}$$

$$\int_{[x^2, x]} \frac{dt}{x^2 \ln t} \leq \int_{[x^2, x]} \frac{dt}{t \ln t} \leq \int_{[x^2, x]} \frac{dt}{x \ln t} \quad \text{donc}$$

$$-\frac{H(x)}{x^2} \leq \left[\ln(|\ln t|) \right]_{x^2}^x \leq -\frac{H(x)}{x} \quad \text{donc } \frac{-H(x)}{x^2} \leq \ln(-\ln x) - \ln(-2\ln x) \leq -\frac{H(x)}{x}$$

$$\text{donc } \frac{-H(x)}{x^2} \leq -\ln 2 \leq -\frac{H(x)}{x} \quad \text{donc } \frac{H(x)}{x^2} \geq \ln 2 \geq \frac{H(x)}{x}$$

On $x > 0$ et $x^2 > 0$ donc $H(x) \geq x^2 \ln 2$ et $H(x) \leq x \ln 2$.

Ainsi $x^2 \ln 2 \leq H(x) \leq x \ln 2$ pour tout $x \in]0, 1[$.

Par théorème d'encadrement, on en déduit $\lim_{x \rightarrow 1^-} H(x) = \ln 2$.

⑩ $\lim_{x \rightarrow 0} H(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1} H(x) = \ln 2$. On peut donc prolonger H par continuité

en 0 et en 1 en posant $H(0) = 0$ et $H(1) = \ln 2$.

(i) $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. Elle admet donc des primitives sur ce domaine. Notons g l'une d'entre elles.

Alors $g \in \mathcal{D}^1([0,1[\cup]1,+\infty[)$ et $g': t \mapsto \frac{1}{\ln t}$. g' est continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ donc $g \in C^1([0,1[\cup]1,+\infty[)$

Au voisinage de tout point de $]0,1[\cup]1,+\infty[$,
 $H(x) = g(x^2) - g(x)$ donc H s'exprime à l'aide de somme et composées de fonctions de classe C^1 .

Ainsi $H \in C^1([0,1[\cup]1,+\infty[)$

Soit $x \in I$. $H'(x) = 2x g'(x^2) - g'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}$.

$H \in C^0([0,1[) \cap \mathcal{D}^1([0,1[)$ et pour tout $x \in]0,1[$, $H'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} H'(x) = 0$

Le théorème de la limite de la dérivée assure alors que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{H(x) - H(0)}{x - 0} = 0$
 donc H est dérivable en 0, $H'(0) = 0$ et H' est continue en 0.

De même, $H \in C^0([0,+\infty[) \cap \mathcal{D}^1([0,1[\cup]1,+\infty[)$ et pour tout $x \in I$,
 $H'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$. On $\frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \ln'(1) = 1$ car $\ln$ est dérivable en 1

Donc $\lim_{x \rightarrow 1} H'(x) = 1$.

Le théorème de la limite de la dérivée assure que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{H(x) - H(1)}{x - 1} = 1$. Donc H est dérivable en 1, $H'(1) = 1$ et H' est continue en 1.

Finalement, $H \in C^1(\mathbb{R}^+)$.

j) Pour tout $x \in I$, $H'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$ donc :

x	0	1	$+\infty$
$H'(x)$	0	+	+
H	0	$\nearrow \ln x$	

La fonction H est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

TD Intégration Conigé ex 18

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 + 2k/n}}$
 $= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ où $f: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$

La fonction f est continue sur $[0,1]$ donc $u_n \rightarrow \int_0^1 f$

Or $\int_0^1 f = \left[\sqrt{1+2x} \right]_0^1 = \sqrt{3} - 1$. Ainsi (u_n) converge vers $\sqrt{3} - 1$.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n+k}{n^2+k^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2} \frac{1+k/n}{1+k^2/n^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

où $f: x \mapsto \frac{1+x}{1+x^2}$. La fonction f est continue sur $[0,1]$ donc

$\lim v_n = \int_0^1 f = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2} \frac{2x}{1+x^2} \right) dx = \left[\text{Arctan } x + \frac{1}{2} \ln |1+x^2| \right]_0^1$
 $= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{8k^2}{n^3 + 8k^3} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^2}{n^3} \frac{8k^2/n^2}{1 + 8k^3/n^3} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

où $f: x \mapsto \frac{8x^2}{1+8x^3}$. La fonction f est continue sur $[0,1]$ donc

$\lim w_n = \int_0^1 f = \int_0^1 \frac{1}{3} \frac{24x^2}{1+8x^3} dx = \left[\frac{1}{3} \ln |1+8x^3| \right]_0^1 = \frac{1}{3} \ln 9$.

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^*. \quad x_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k e^{-\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} e^{-\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $f: x \mapsto x e^{-x}$. La fonction f est continue sur $[0, 1]$ donc

$\lim x_n = \int_0^1 f$. Or les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto -e^{-x}$ sont de classe C^1 sur $[0, 1]$

donc par intégration par parties

$$\int_0^1 f = \int_0^1 \underset{\substack{\uparrow \\ x}}{\overset{\substack{-e^{-x} \\ \downarrow \\ 1}}{x e^{-x}}} dx = \left[-x e^{-x} \right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = \left[-x e^{-x} - e^{-x} \right]_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + 1 = -2e^{-1} + 1$$

$$\text{Ainsi, } \lim x_n = -2e^{-1} + 1.$$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^*. \quad y_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{4 - \frac{k^2}{n^2}}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $f: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$. La fonction f est continue sur $[0, 1]$ donc $\lim y_n = \int_0^1 f$

$$\text{Or } \int_0^1 f = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}} dx = \left[\text{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right) \right]_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Donc } \lim y_n = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^*. \quad z_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \sin\left(\frac{k}{n} \pi\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ où } f: x \mapsto x^2 \sin(\pi x)$$

La fonction f est continue sur $[0, 1]$ donc $\lim z_n = \int_0^1 f$.

Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto -\frac{\cos(\pi x)}{\pi}$ sont de classe C^1 sur $[0, 1]$

donc par intégration par parties,

$$\int_0^1 f = \int_0^1 \underset{\downarrow 2x}{x^2} \overset{\uparrow \frac{-\cos(\pi x)}{\pi}}{\sin(\pi x)} dx = \left[\frac{-x^2 \cos(\pi x)}{\pi} \right]_0^1 + \frac{2}{\pi} \int_0^1 x \cos(\pi x) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \int_0^1 x \cos(\pi x) dx$$

Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \frac{\sin(\pi x)}{\pi}$ sont de classe C^1 sur $[0, 1]$ donc par intégrations par parties

$$\int_0^1 \underset{\downarrow 1}{x} \overset{\uparrow \frac{\sin(\pi x)}{\pi}}{\cos(\pi x)} dx = \left[\frac{x \sin(\pi x)}{\pi} \right]_0^1 - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sin(\pi x) dx$$

$$= -\frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos(\pi x)}{\pi} \right]_0^1 = -\frac{2}{\pi^2}$$

Finalement, $\lim z_n = \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3}$

TD Intégration Corrigé ex 19.

$$\begin{aligned} \text{Soit } n \in \mathbb{N}^*. \quad u_n > 0 \text{ et } \ln(u_n) &= \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \ln\left((2n)(2n-1) \dots (n+1)\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(n+k) = \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\ln n + \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln n + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) = \ln \frac{1}{n} + \ln n + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{où } f: x \mapsto \ln(1+x) \end{aligned}$$

f est continue sur $[0, 1]$ donc $\ln(u_n) \longrightarrow \int_0^1 f$

Or $\int_0^1 f = \int_0^1 1 \cdot \ln(1+x) dx$ et les fonctions $x \mapsto 1+x$ et $x \mapsto \ln(1+x)$ sont de classe C^1 sur $[0, 1]$ donc par intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f &= \int_0^1 \overset{\uparrow}{1} \ln(1+x) dx = \left[\underset{\downarrow \frac{1}{1+x}}{(1+x) \ln(1+x)} \right]_0^1 - \int_0^1 1 dx \\ &= 2 \ln 2 - 1. \end{aligned}$$

Finalement, $\ln u_n \longrightarrow 2 \ln 2 - 1$ donc

$$\lim u_n = \lim e^{\ln u_n} = e^{2 \ln 2 - 1} = \frac{4}{e}.$$

TD Intégration. Corrigé exercice 22.

Posons $f: x \mapsto \sin x$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $f \in C^{2n+2}(\mathbb{R})$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} f^{(2n+2)}(t) dt$$

Pour tout $k \in [0, 2n+1]$, $f^{(k)}: x \mapsto \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$

$$\text{donc } f^{(k)}(0) = \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \equiv 0 [2] \\ 1 & \text{si } k \equiv 1 [4] \\ -1 & \text{si } k \equiv 3 [4] \end{cases}$$

donc pour tout $l \in [0, n]$, $f^{(2l)}(0) = 0$ et $f^{(2l+1)}(0) = (-1)^l$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^l x^{2l+1}}{(2l+1)!}$.
les termes d'indice pair sont nuls

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}. f(x) = \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^l x^{2l+1}}{(2l+1)!} = f(x) - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} f^{(2n+2)}(t) dt.$$

D'après l'inégalité de la moyenne,

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| &= \left| \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} f^{(2n+2)}(t) dt \right| = \left| \int_{[\min(0,x), \max(0,x)]} \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} f^{(2n+2)}(t) dt \right| \\ &\leq \int_{[\min(0,x), \max(0,x)]} \frac{|x-t|^{2n+1}}{(2n+1)!} |f^{(2n+2)}(t)| dt \end{aligned}$$

On pour tout $t \in [\min(0,x), \max(0,x)]$, $0 \leq |x-t| \leq |x|$ et $0 \leq |f^{(2n+2)}(t)| \leq 1$

$$\text{Car } \left| f^{(2n+2)}(t) \right| = \left| \sin \left(t + \frac{(2n+2)\pi}{2} \right) \right|$$

$$\text{donc } |x-t|^{2n+1} \left| f^{(2n+2)}(t) \right| \leq |x|^{2n+1}$$

Par croissance de l'intégrale sur un segment, on en déduit :

$$\begin{aligned} \int_{[\min(0,x), \max(0,x)]} \frac{|x-t|^{2n+1}}{(2n+1)!} \left| f^{(2n+2)}(t) \right| dt &\leq \int_{[\min(0,x), \max(0,x)]} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} dt \\ &= \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \times |x| \end{aligned}$$

$$\text{Or } \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{car pour tout } a \in \mathbb{R}, \quad a^n = o(n!)$$

$$\text{et puisque } 0 \leq \left| f(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \times |x|$$

le théorème d'encadrement assure que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| f(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| = 0$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = f(x)$$

On montre de manière analogue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$