Colle 14 : quinzaine du 3 au 16 juin

Intégration : Fonctions en escalier. Intégrale d'une fonction continue sur un segment. Linéarité, positivité et croissance, stricte positivité. Relation de Chasles. Si $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leqslant b$, inégalité $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$.
Sommes de Riemann. Théorème fondamental de l'analyse. Calcul d'intégrale à l'aide de primitives. Intégration par parties et changement de variable. Inégalité de Taylor-Lagrange, formule de Taylor-Young. Extension au cas des fonctions à valeurs complexes.

Matrices : matrice d'une application linéaire dans un couple de bases. Calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire. Matrice d'une combinaison linéaire, d'une composée. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes. Matrice de passage d'une base à une autre. Formules de changement de bases pour les vecteurs, les endomorphismes et les applications linéaires. Matrices semblables.
Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Image, noyau et rang d'une matrice.
Théorème du rang. Conservation du rang par multiplication par une matrice inversible. Rang de la transposée.

Déterminants : Forme n-linéaire alternée sur un espace vectoriel de dimension n ; déterminant d'une famille de vecteurs dans une base. Expression du déterminant en fonction des coordonnées en dimension 2 et 3. Formule de changement de bases pour le déterminant. Caractérisation des bases.
Déterminant d'un endomorphisme, déterminant d'une composée.
Déterminant d'une matrice carrée. Déterminant d'un produit. Caractérisation des matrices inversibles. Déterminant de l'inverse, déterminant de la transposée.
Calcul pratique : effet des opérations élémentaires, développement par rapport à une ligne ou une colonne. Déterminant d'une matrice triangulaire.

A - Deux questions de cours parmi :

1. Propriétés de l'intégrale : linéarité, positivité et croissance.
2. Énoncer l'inégalité triangulaire intégrale.
3. Énoncer le théorème de stricte positivité de l'intégrale.
4. Définir la notion de somme de Riemann et énoncer le théorème les concernant.
5. Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.
6. Énoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange.
7. Définir la notion de matrice d'une famille de vecteurs relativement à une base donnée.
8. Définir la notion de matrice d'une application linéaire relativement à deux bases données, la notion de matrice d'un endomorphisme relativement à une base. Comment utilise-t-on la matrice pour déterminer les coordonnées de l'image d'un vecteur ?
9. Matrice d'une composée d'applications linéaires.
10. Définir la matrice de passage d'une base $\mathscr{B}$ vers une base $\mathscr{C}$ et donner la formule de changement de bases pour les vecteurs.
11. Formules de changement de bases pour les applications linéaires et les endomorphismes.
12. Définir la notion de matrices semblables.
13. Définir l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice. Théorème du rang pour une matrice.
14. CaractérisationS des matrices inversibles. (en donner 6 : par le rang, par le noyau, par l'image, par le déterminant, par l'existence d'un inverse à droite/à gauche)
15. Formule de changement de bases pour le déterminant. Caractérisation des bases à l'aide du déterminant.
16. Comment calcule-t-on le déterminant d'un endomorphisme ?
17. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Donner $\det(\lambda A)$, $\det(A^T)$, $\det(AB)$, et $\det(A^{-1})$ lorsque A est inversible.

B - une question de cours ou un savoir-faire d'un des programmes précédents