Colle 15 : quinzaine du 17 au 30 juin

Développements limités.
Relations de comparaison pour les suites et les fonctions : relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence. Liens entre les relations de comparaison. Opérations sur les équivalents : produit, quotient, puissances et composition à droite (changement de variable). Propriétés conservées par équivalence : signe, limite. Équivalents usuels. Obtention d'un équivalent par encadrement.
Développements limités : définition, unicité, troncature, forme normalisée. Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient (par composition avec 1/(1+u)). Composition dans des cas simples. Primitivation d'un développement limité. Formule de Taylor-Young (sans démonstration pour l'instant). Développements limités usuels à tout ordre en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, exp, cos, sin, ch, sh, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, où α est un réel. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de tan et Arctan.
Applications des développements limités : calcul de limites. Étude locale d'une fonction : prolongement par continuité, dérivabilité du prolongement, tangente, position relative de la courbe et de la tangente. Détermination d'asymptote et étude des positions relatives.

Ensembles finis et dénombrement : Cardinal d'un ensemble fini, d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité. Applications entre ensembles finis. Opérations sur les cardinaux : union disjointe, union quelconque, complémentaire, produit cartésien. Listes et combinaison. Si E et F sont deux ensembles finis, cardinal de F^E, de $\mathcal{P}(E)$, nombre d'injections de E dans F, nombre de permutations de E, nombre de parties à p éléments de E.

Probabilités sur un univers fini : expérience aléatoire, univers des possibles, événements. Probabilité sur un univers fini. Équiprobabilité. Probabilité d'une réunion, de l'événement contraire, croissance. Probabilités conditionnelles : définition, formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes. Indépendance : couple d'événements indépendants ; famille finie d'événements mutuellement indépendants.

A - Questions de cours :

1. Définir la notion de fonction dominée par une autre au voisinage d'un point.
2. Définir la notion de fonction négligeable devant une autre au voisinage d'un point.
3. Définir la notion de fonctions équivalentes au voisinage d'un point.
4. Développements limités usuels.
5. Équivalents usuels.
6. Énoncer la formule de Taylor-Young.
7. Énoncer les notions conservées par équivalence : signe et limite.
8. Cardinal d'une union disjointe, d'une union quelconque, du complémentaire, d'un produit cartésien.
9. Que peut-on dire d'une application injective entre deux ensembles finis de même cardinal ? d'une application surjective ?
10. Définir la notion de système complet d'événements. Donner deux exemples de tels systèmes dans un univers fini Ω.
11. Définir la notion de probabilité sur un univers fini.
12. Définir la notion de probabilité conditionnelle.
13. Formule des probabilités composées, des probabilités totales et formule de Bayes.

B - Savoir-faire

1. Dénombrer le nombre d'applications entre deux ensembles finis E et F, puis le nombre d'applications injectives entre deux ensembles finis E et F.
2. Dénombrer le nombre de parties d'un ensemble fini E.
3. Démonstration combinatoire de la formule du triangle de Pascal.
4. Probabilité sur un univers fini : démonstration des relations $P(\emptyset) = 0$, $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, et $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ pour deux événements quelconques A et B.
5. Probabilité conditionnelle : démonstration du fait que c'est une probabilité sur l'univers d'origine.

C - une question de cours ou un savoir-faire d'un des programmes précédents