Colle 3 : semaines du 14 au 20 octobre et du 4 au 10 novembre

Sommes et produits : notation, manipulations élémentaires. Somme des n premiers entiers, somme des termes d'une suite arithmétique, somme des termes d'une suite géométrique, somme des carrés des n premiers entiers. Changement d'indices. Sommes télélescopiques. Sommes doubles.
Coefficients binomiaux, formule du triangle de Pascal, formule du binôme de Newton, et factorisation de $a^n - b^n$.

Nombres complexes : Parties réelle et imaginaire. Conjugaison. Module. Inégalités triangulaires.
Complexes de module 1. Notation $e^{i\theta}$. Formules d'Euler et De Moivre. Factorisation de $\mathrm{e}^{i\theta} \pm 1$ et de $\mathrm{e}^{i\theta} \pm \mathrm{e}^{i\alpha}$.
Linéarisation. Transformation de $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$ en un polynôme en $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
Argument d'un nombre complexe non nul. Écriture trigonométrique.

Questions de cours :

1. Donner la définition des coefficients binomiaux. Énoncer la formule du triangle de Pascal.
2. Énoncer la formule du binôme de Newton.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{C}$, énoncer la formule de factorisation de $a^n - b^n$. Factoriser $a^3 - b^3$ et $a^3 + b^3$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, donner la valeur des sommes usuelles $\sum\limits_{k=1}^{n} k$, $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{C}$, donner la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{n} a^k$.
6. Donner la définition du module, du conjugué et d'un argument d'un complexe non nul.
7. Énoncer la première inégalité triangulaire et le cas d'égalité. Énoncer la deuxième inégalité triangulaire.
8. Pour $z \in \mathbb{C}$, exprimer $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$ et $|z|$ en fonction de z et $\overline{z}$.
9. Définir $\mathrm{e}^{i\theta}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Énoncer les formules d'Euler et la formule de De Moivre.
10. À quelles conditions nécessaires et suffisantes deux complexes donnés sous forme algébrique sont-ils égaux ? et pour deux complexes non nuls donnés sous forme trigonométrique ?
11. Énoncer trois caractérisations (une portant sur la forme algébrique, une autre sur le conjugué, et une sur les arguments) pour qu'un complexe soit réel (respectivement imaginaire pur).

Savoir-faire

1. Réindexer une somme.
2. Écrire un nombre complexe sous forme algébrique ou sous forme exponentielle.
3. Mettre en œuvre la technique de l'angle moitié pour déterminer une forme trigonométrique d'un nombre complexe s'exprimant sous la forme $e^{ia} \pm e^{ib}$.

   Exemple : Déterminer une forme trigonométrique du nombre complexe $z = 1 + e^{-i\frac{3\pi}{7}}$, puis une forme trigonométrique du nombre complexe $w = e^{i\frac{\pi}{5}} - e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
4. Linéariser un produit d'expressions trigonométriques.
5. Déterminer une expression de $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ à l'aide de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

   Exemple : Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer
$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kt) \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \sin(kt).$$
7. Pour $k, n \in \mathbb{N}^*$ avec $1 \leqslant k \leqslant n$, montrer que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, et calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.