Colle 9 : quinzaine du 24 février au 9 mars

Calcul matriciel et systèmes linéaires : Notion de matrice. Opérations sur les matrices : combinaison linéaire et produit ; associativité et bilinéarité du produit. Matrices élémentaires, produit de deux matrices élémentaires. Transposée et opérations sur les transposées.
Interprétation matricielle des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes. Écriture matricielle d'un système linéaire. Système homogène, système compatible. Structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire. Traduction matricielle de l'algorithme du pivot de Gauss.
Ensemble des matrices carrées : matrice identité, matrices scalaires, matrices symétriques, antisymétriques, diagonales, triangulaires. Puissances. Formule du binôme. Matrices inversibles ; transposée et produit de matrices inversibles. Caractérisation des matrices inversibles, et méthode pratique de calcul de l'inverse (par résolution d'un système linéaire, par opérations sur les lignes ou par opérations sur les colonnes).

Fonctions d'une variable réelle : limites et continuité
Notion de voisinage. Limite finie ou infinie en un point ou en l'infini. Unicité de la limite. Limite à droite, à gauche. Continuité en un point, continuité à droite, continuité à gauche. Prolongement par continuité.
Propriétés des limites : si f a une limite finie en a, elle est bornée au voisinage de a. Si f a une limite $\ell > 0$ en a, elle est minorée par $\frac{\ell}{2}$ au voisinage de a.
Caractérisation séquentielle de la limite. Opérations sur les limites. Passage à la limite dans les inégalités larges. Théorèmes de minoration, majoration, des gendarmes. Théorème de la limite monotone.

A - Questions de cours :

1. Énoncer la formule donnant les coefficients d'une matrice produit. Énoncer la formule du binôme de Newton pour les matrices.
2. Définir la transposée d'une matrice. Donner la transposée d'une combinaison linéaire, et la transposée d'un produit. Défnir les notions de matrice symétrique et de matrice antisymétrique.
3. Définir la notion de matrice inversible. Relations avec la transposée et le produit.
4. Définir la notion de matrice triangulaire inférieure, de matrice triangulaire supérieure. À quelle condition nécessaire et suffisante, une matrice triangulaire est-elle inversible ?
5. Énoncer l'une des 9 définitions de limite au choix du colleur (et sans utiliser la notion de voisinage).
6. Définir la notion de fonction continue en un point. L'énoncer avec des quantificateurs.
7. Énoncer les théorèmes de majoration et minoration. Énoncer le théorème des gendarmes.
8. Énoncer le théorème de la limite monotone.
9. Définir la notion de fonction prolongeable par continuité en un point. Donner sa caractérisation.
10. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
11. Énoncer le théorème de la bijection.
12. Énoncer le théorème des bornes atteintes.
13. Soit $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, et u une suite d'éléments de I convergente de limite ℓ. Si f est continue en ℓ, que peut-on dire de la suite $(f(u_n))$?

B - Savoir-faire

1. Déterminer si une matrice carrée donnée par le colleur est inversible, et le cas échéant, calculer son inverse.
2. Résoudre un système linéaire (sans paramètre et de taille raisonnable) donné par le colleur.
3. Calculer les puissances n-ème d'une matrice donnée par le colleur et s'écrivant sous la forme $\lambda I_n + N$, où N est une matrice triangulaire à coefficients diagonaux nuls.
   Exemple : calculer les puissances n-ème de la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.
4. Donner deux méthodes pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point, l'une faisant intervenir la notion de limite à droite et à gauche, l'autre faisant intervenir des suites. Montrer que cos n'a pas de limite en $+\infty$.
5. Montrer qu'une fonction continue de $[0, 1]$ dans lui-même admet au moins un point fixe.
6. Soit f une fonction à valeurs réelles continue sur $[0; +\infty[$, admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée sur $[0; +\infty[$.

C - une question de cours ou un savoir-faire d'un des programmes précédents