Colle 10 : quinzaine du 10 au 23 mars

Polynômes : Polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, somme, produit, composée. Degré, coefficient dominant. Degré d'une somme et d'un produit. Fonction polynomiale associée à un polynôme.
Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, division euclidienne.
Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$: dérivation formelle, linéarité, dérivée d'un produit, dérivée k-ième, formule de Taylor.
Racine d'un polynôme. Caractérisation en termes de divisibilité. Multiplicité, caractérisation par les dérivées successives. Polynôme scindé sur $\mathbb{K}$, relations coefficients-racines (ne concernent que la somme et le produit).
Polynômes irréductibles. Théorème de D'Alembert-Gauss. Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, de $\mathbb{R}[X]$ et décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.
Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle à pôles simples.

A - Questions de cours :

1. Soit P, Q deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Que peut-on dire du degré des polynômes $P+Q$ et PQ en fonction des degrés des polynômes P et Q ? Donner une condition suffisante pour avoir l'égalité pour le degré de $P+Q$.
2. Énoncer le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.
3. Énoncer la caractérisation des racines en terme de divisibilité.
4. Définir la notion de racine multiple. Énoncer la caractérisation de la multiplicité en fonction des polynômes dérivés successifs.
5. Que peut-on dire du nombre de racines complexes d'un polynôme non nul ? En déduire une méthode pour prouver qu'un polynôme est nul.
6. Énoncer la formule de Taylor.
7. Énoncer la formule de Leibniz.
8. Énoncer le théorème de D'Alembert-Gauss.
9. Donner les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, et les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
10. Définir la notion de polynôme scindé sur $\mathbb{K}$. Énoncer les relations liant les coefficients d'un polynôme scindé avec la somme et le produit de ses racines.
11. Si P est un polynôme à coefficients réels et si α est une racine complexe non réelle de P, que peut-on en déduire ?

B - Savoir-faire

1. Effectuer la division euclidienne de deux polynômes donnés par le colleur.
2. Utiliser la méthode de Hörner pour évaluer un polynôme donné en une valeur explicite.
3. Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ et a un élément de $\mathbb{K}$. Montrer que P a pour reste $P(a)$ dans la division euclidienne par $X-a$.
4. Déterminer la somme et le produit des racines n-ièmes de l'unité.
5. Donner la factorisation en produit de polynômes irréductibles et unitaires dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ d'un polynôme du type aX^n+b donné par le colleur.
6. Effectuer la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle donnée par le colleur.

C - une question de cours ou un savoir-faire d'un des programmes précédents